

Un patient doit prendre toutes les heures une dose de 2 mL d'un médicament.

On introduit la suite  $(u_n)$  telle que le terme  $u_n$  représente la quantité de médicament, exprimée en mL présente dans l'organisme immédiatement après  $n$  prises de médicament.

On a  $u_1 = 2$  et

pour tout entier naturel  $n$  strictement positif :  $u_{n+1} = 2 + 0,8u_n$ .

## Partie A

En utilisant ce modèle, un médecin cherche à savoir à partir de combien de prises du médicament la quantité présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL.

1. Calculer la valeur  $u_2$ .
2. Montrer par récurrence que :

$$u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1} \text{ pour tout entier naturel } n \text{ strictement positif.}$$

3. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  et donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Soit  $N$  un entier naturel strictement positif, l'inéquation  $u_N \geq 10$  admet-elle des solutions ?  
Interpréter le résultat de cette question dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer à partir de combien de prises de médicament la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL. Justifier votre démarche.

## Partie B

En utilisant la même modélisation, le médecin s'intéresse à la quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme du malade au cours du temps.

On définit pour cela la suite  $(S_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  strictement positif par

$$S_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

On admet que la suite  $(S_n)$  est croissante.

1. Calculer  $S_2$ .
2. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  strictement positif,

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 10n - 40 + 40 \times 0,8^n.$$

3. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .
4. On donne la fonction mystere suivante, écrite en langage Python :

```

1 def mystere(k):
2     n = 1
3     s = 2
4     while s < k:
5         n = n + 1
6         s = 10 - 40/n + (40*0.8**n)/n
7     return n

```

Dans le contexte de l'énoncé, que représente la valeur renvoyée par la saisie `mystere(9)` ?

5. Justifier que cette valeur est strictement supérieure à 10.