Exercice BAC 2025 Centres Étrangers - Ex 3

Galilee.ac

Fonction logarithme | Étude de fonction | Suites numériques | Raisonnement par récurrence | Algorithmique Python | Théorème des valeurs intermédiaires

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 4\ln(x+1) - \frac{x^2}{25}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en -1.
2. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$, on a :
$$f'(x) = \frac{100-2x-2x^2}{25(x+1)}$$
3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ puis en déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle [2 ; 6,5].
4. On considère h la fonction définie sur l'intervalle [2 ; 6,5] par $h(x) = f(x) - x$.

   On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction h :

x	2	$m \approx 2,364$	$6,5$
$h(x)$	$h(2)$ ↗	$M \approx 2,265$	↘ $h(6,5)$

   Montrer que léquation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [2\ ;\ 6,5]$.

5. On considère le script suivant, écrit en langage Python:

```
from math import *

def f(x):
    return 4*log(1+x)-(x**2)/25

def bornes(n):
    p = 1/10**n
    x = 6
    while f(x)-x > 0:
        x = x + p
    return (x-p, x)
```

   On rappelle qu'en langage Python:

   - la commande log(x) renvoie la valeur $\ln x$;
   - la commande c$**$d renvoie la valeur de c^d.

   (a) Donner les valeurs renvoyées par la commande bornes(2).
   On donnera les valeurs arrondies au centième.

   (b) Interpréter ces valeurs dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser les résultats obtenus dans la partie A.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, et, pour tout entier naturel $n,\ u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel,

$$2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 6,5.$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ.

3. On rappelle que le réel α, défini dans la partie A, est la solution de l'équation $h(x) = 0$ sur l'intervalle [2 ; 6,5].

   Justifier que $\ell = \alpha$.