Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée posidonie, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles.

La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares (ha), et au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha de cette zone.

**Partie A :** étude d'un modèle discret

Pour tout entier naturel $n$, on note $u_n$ la superficie de la zone, en hectare, recouverte par la posidonie au premier juillet de l'année $2024+n$. Ainsi, $u_0 = 1$.

Une étude conduite sur cette superficie a permis d'établir que pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+1} = -0,02u_n^2 + 1,3u_n.$$

1. Calculer la superficie que devrait recouvrir la posidonie au premier juillet 2025 d'après ce modèle.
2. On note $h$ la fonction définie sur [0 ; 20] par

$$h(x) = -0,02x^2 + 1,3x.$$

   On admet que $h$ est croissante sur [0 ; 20].

   (a) Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$.

   (b) En déduire que la suite $(u_n)$ converge. On note $L$ sa limite.

   (c) Justifier que $L = 15$.

3. Les biologistes souhaitent savoir au bout de combien de temps la surface recouverte par la posidonie dépassera les 14 hectares.

   (a) Sans aucun calcul, justifier que, d'après ce modèle, cela se produira.

   (b) Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'en fin d'exécution, il affiche la réponse à la question des biologistes.

[frame=single] def seuil(): n=0 u= 1 while ...... : n=...... u=...... return n

**Partie B :** étude d'un modèle continu

On souhaite décrire la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie au cours du temps avec un modèle continu.

Dans ce modèle, pour une durée $t$, en année, écoulée à partir du premier juillet 2024, la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie est donnée par $f(t)$, où $f$ est une fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ vérifiant :

- $f(0) = 1$ ;
- $f$ ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$ ;
- $f$ est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ ;

- $f$ est solution sur $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E_1) : \quad y' = 0,02y(15 - y).$$

On admet qu'une telle fonction $f$ existe; le but de cette partie est d'en déterminer une expression.
On note $f'$ la fonction dérivée de $f$.

1. Soit $g$ la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$.

   Montrer que $g$ est solution de l'équation différentielle

$$(E_2) : \quad y' = -0,3y + 0,02.$$

2. Donner les solutions de l'équation différentielle $(E_2)$.
3. En déduire que pour tout $t \in [0\ ;\ +\infty[$ :

$$f(t) = \frac{15}{14\mathrm{e}^{-0,3t} + 1}.$$

4. Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.
5. Résoudre dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $f(t) > 14$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.