L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. On considère :

- les points A$(-1\ ;\ 2\ ;\ 1)$, B$(1\ ;\ -1\ ;\ 2)$ et C(1 ; 1 ; 1) ;
- la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par:

$$d : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{3}{2}+2t \\ y & = & 2+t \\ z & = & 3-t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R};$$

- la droite d' dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d : \left\{\begin{array}{lcr} x & = & s \\ y & = & \frac{3}{2}+s \\ z & = & 3-2s \end{array}\right. \quad \text{avec } s \in \mathbb{R};$$

Partie A

1. Montrer que les droites d et d' sont sécantes au point S$\left(-\frac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ 4\right)$.
2. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

   (b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est:

$$x+2y+4z-7=0.$$

3. Démontrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
4. (a) Démontrer que le point H$(-1\ ;\ 0\ ;\ 2)$ est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC)

   (b) En déduire qu'il n'existe aucun point M du plan (ABC) tel que S$M < \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Partie B

On considère un point M appartenant au segment [CS]. On a donc $\overrightarrow{\text{C}M} = k\overrightarrow{\text{CS}}$ avec k réel de l'intervalle [0 ; 1].

1. Déterminer les coordonnées du point M en fonction de k.
2. Existe-t-il un point M sur le segment [CS] tel que le triangle (MAB) soit rectangle en M ?