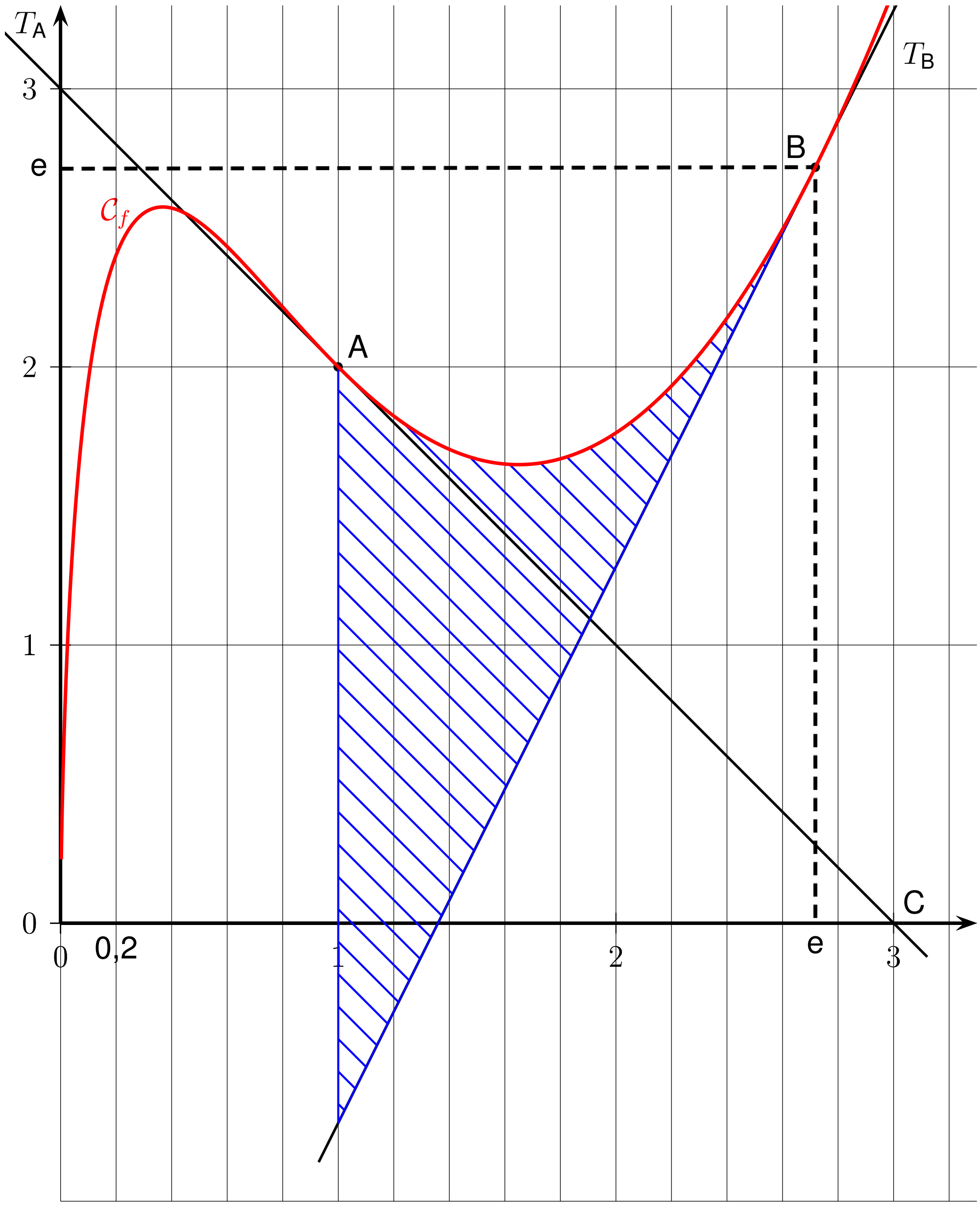
On considère une fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. On admet qu'elle est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Dans un repère orthogonal, on a tracé ci-dessous:

- la courbe représentative de f, notée $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle]0 ; 3] ;
- la droite T_A,tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A(1 ; 2) ;
- la droite T_B tangente à $\mathcal{C}_f$ au point B(e ; e).

On précise par ailleurs que la tangente T_A passe par le point C(3 ; 0).



Partie A : Lectures graphiques

On répondra aux questions suivantes en les justifiant à l'aide du graphique.

1. Déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.
2. Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle dans l'intervalle]0 ; 3] ?
3. Quel est le signe de $f''(0,2)$?

Partie B : étude de la fonction f

On admet dans cette partie que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2]$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$.
   En déduire que $\mathcal{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.
2. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$.
   On admettra que la limite de f en 0 est égale à 0.
3. On admet que pour tout x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$, $\quad f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$.
   (a) Montrer que pour tout x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$, $f''(x) = \dfrac{1}{x}(4\ln x + 1)$.
   (b) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et préciser la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.
   (c) Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente T_{B} sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

Partie C : Calcul d'aire

1. Justifier que la tangente T_{B} a pour équation réduite $y = 2x - \mathrm{e}$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2 + 1}{4}.$$

3. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine hachuré sur la figure, délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, la tangente T_{B}, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
   On admet que $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x(\ln x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{4}$.
   En déduire la valeur exacte de $\mathcal{A}$ en unité d'aire.