On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x \sin(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

PARTIE A

1. (a) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$,

$$f'(x) = \mathrm{e}^x[\sin(x) + \cos(x)].$$

   (b) Justifier que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$

2. (a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

   (b) Démontrer que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

   (c) En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{e}^x \sin(x) \geqslant x$.

3. Justifier que le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

PARTIE B

On note

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. En intégrant par parties l'intégrale I de deux manières différentes, établir les deux relations suivantes :

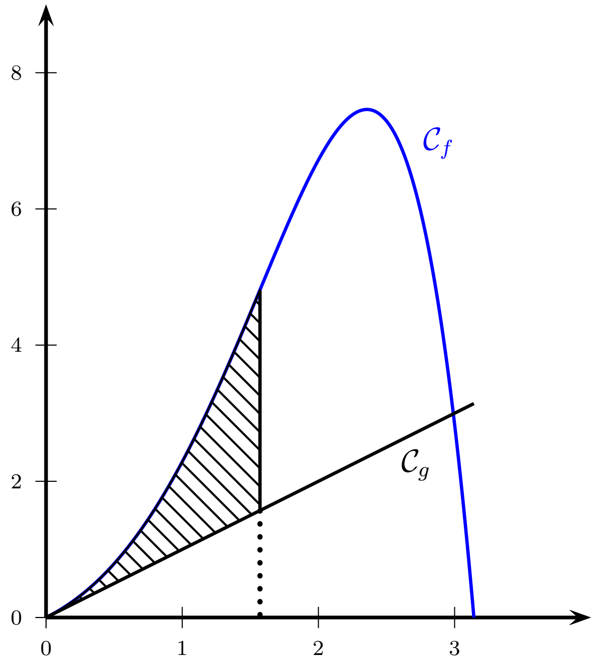
$$I = 1 + J \qquad \text{et} \qquad I = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - J.$$

2. En déduire que $I = \dfrac{1 + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2}$.

3. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$.

   Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées dans le repère orthogonal ci-dessous sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.

   Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré situé entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.


8
6
4
2
0
0
1
2
3
$\mathcal{C}_f$
$\mathcal{C}_g$