

Le codage base64, utilisé en informatique, permet de représenter et de transmettre des messages et d'autres données telles que des images, en utilisant 64 caractères: les 26 lettres majuscules, les 26 lettres minuscules, les chiffres de 0 à 9 et deux autres caractères spéciaux.

*Les parties A, B et C sont indépendantes.*

### Partie A

Dans cette partie, on s'intéresse aux séquences de 4 caractères en base64. Par exemple, gP3g est une telle séquence. Dans une séquence, l'ordre est à prendre en compte: les séquences m5C2 et 5C2m ne sont pas identiques.

1. Déterminer le nombre de séquences possibles.
2. Déterminer le nombre de séquences si l'on impose que les 4 caractères sont différents deux à deux.
3. (a) Déterminer le nombre de séquences ne comportant pas de lettre A majuscule  
(b) En déduire le nombre de séquences comportant au moins une lettre A majuscule.  
(c) Déterminer le nombre de séquences comportant exactement une fois la lettre A majuscule.  
(d) Déterminer le nombre de séquences comportant exactement deux fois la lettre A majuscule.

### Partie B

On s'intéresse à la transmission d'une séquence de 250 caractères d'un ordinateur à un autre. On suppose que la probabilité qu'un caractère soit mal transmis est égale à 0,01 et que les transmissions des différents caractères sont indépendantes entre elles. On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de caractères mal transmis.

1. On admet que la variable aléatoire  $X$  suit la loi binomiale. Donner ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité que tous les caractères soient bien transmis. *On donnera l'expression exacte, puis une valeur approchée à  $10^{-3}$  près.*
3. Que pensez-vous de l'affirmation suivante: La probabilité que plus de 16 caractères soient mal transmis est négligeable?

### Partie C

On s'intéresse maintenant à la transmission de 4 séquences de 250 caractères.

On note  $X_1, X_2, X_3$  et  $X_4$  les variables aléatoires correspondant aux nombres de caractères mal transmis lors de la transmission de chacune des 4 séquences.

On admet que les variables aléatoires  $X_1, X_2, X_3$  et  $X_4$  sont indépendantes entre elles et suivent la même loi que la variable aléatoire  $X$  définie en partie B.

On note  $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ .

Déterminer, en justifiant, l'espérance et la variance de la variable aléatoire  $S$ .