On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

et on appelle $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.
   (a) Montrer que $g'(x) = f(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   (b) Pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que:
   $$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)}{4x\sqrt{x}}.$$
2. (a) Déterminer la limite de la fonction f en 0.
   (b) Interpréter graphiquement ce résultat.
3. (a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   (b) Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de l'intervalle de définition.
   (c) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ et donner une valeur approchée à 10^{-1} près de cette solution.
4. On pose $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (a) Calculer I.
   (b) Interpréter graphiquement le résultat.
5. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et que:
   $$f"(x) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\left(x-3\sqrt{x}+3\right)}{8x^2\sqrt{x}}.$$
   (a) En posant $X = \sqrt{x}$, montrer que $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   (b) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.