On s'intéresse à l'évolution du taux d'équipement en réfrigérateurs d'une population donnée, c'est-à-dire à la proportion de cette population qui possède au moins un réfrigérateur.

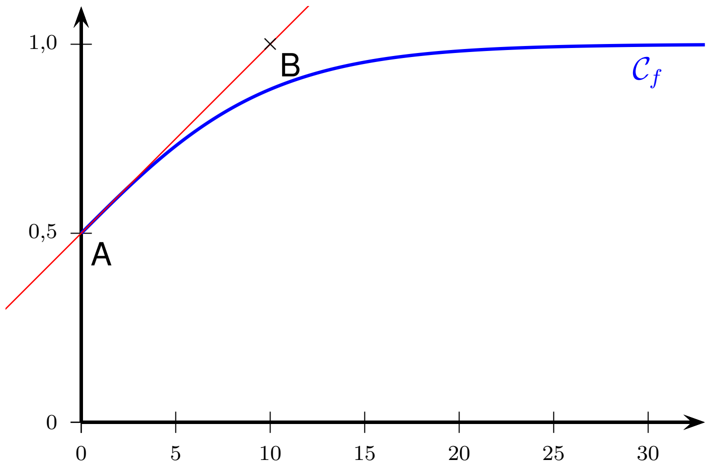
Partie A

On admet que le taux d'équipement en réfrigérateurs est modélisé par une fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{1}{a + \mathrm{e}^{-bt}}$$

où t représente le temps écoulé, en années, depuis 1960, et a et b sont deux constantes réelles strictement positives.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. La fonction f admet pour représentation graphique la courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous :



On considère les points A(0 ; 0,5) et B(10 ; 1).
On admet que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.

1. Par lecture graphique, donner une valeur approchée du taux d'équipement en réfrigérateurs en 1970.
2. On admet que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 1$.

   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Justifier que $a = 1$.
4. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
5. (a) Déterminer l'expression de $f'(t)$ en fonction de t et de la constante b.

   (b) En déduire la valeur de b.

Partie B

On admet, dans la suite de l'exercice, que le taux d'équipement en réfrigérateurs est représenté par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par:

$$f(t) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-0{,}2t}}$$

1. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Montrer qu'il existe un unique réel α positif tel que $f(\alpha) = 0,97$.
4. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement du réel a par deux nombres entiers consécutifs. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

Partie C

Dans cette partie, on cherche à calculer la moyenne du taux d'équipement en réfrigérateurs entre 1960 et 2000.

1. Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{0,2t}}{1+\mathrm{e}^{0,2t}}$.
2. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 40], c'est-à-dire:

$$I = \frac{1}{40}\int_0^{40} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2t}}\,\mathrm{d}t.$$

On donnera la valeur exacte et une valeur approchée au millième.