Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère:

- la droite $\mathcal{D}$ passant par le point A(2 ; 4 ; 0) et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$;
- la droite $\mathcal{D}'$ dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3 \\ y &=& 3+t \\ z &=& 3+t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

1. (a) Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u'}$ de la droite $\mathcal{D}'$.
   (b) Montrer que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles.
   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.

On admet dans la suite de cet exercice qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Cette droite Δ coupe chacune des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. On appellera M le point d'intersection de Δ et $\mathcal{D}$, et M′ le point d'intersection de Δ et $\mathcal{D}'$.

On se propose de déterminer la distance MM′ appelée distance entre les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

2. Montrer que le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite Δ.
3. On note $\mathcal{P}$ le plan contenant les droites $\mathcal{D}$ et Δ, c'est-à-dire le plan passant par le point A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
   (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
   (b) En déduire qu'une équation du plan $\mathcal{P}$ est : $2x - y - 5z = 0$.
   (c) On rappelle que M′ est le point d'intersection des droites Δ et $\mathcal{D}'$.
   Justifier que M′ est également le point d'intersection de $\mathcal{D}'$ et du plan $\mathcal{P}$.
   En déduire que les coordonnées du point M′ sont (3 ; 1 ; 1).
4. (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
   (b) Justifier que le point M a pour coordonnées (1 ; 2 ; 0).
   (c) Calculer la distance MM′.
5. On considère la droite d de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 5t \\ y &=& 2+5t \\ z &=& 1+t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que la droite d est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

(b) On note ℓ la distance d'un point N de la droite d au plan $\mathcal{P}$.
Exprimer le volume du tétraèdre ANMM′ en fonction de ℓ.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \dfrac{1}{3} \times B \times h$ où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

(c) Justifier que, si N_1 et N_2 sont deux points quelconques de la droite d, les tétraèdres AN_1MM' et AN_2MM' ont le même volume.