Partie A : études de deux fonctions

On considère les deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par:

$$f(x) = 0,06\left(-x^2 + 13,7x\right) \quad \text{et} \quad g(x) = (-0,15x + 2,2)\mathrm{e}^{0,2x} - 2,2.$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables et on note f' et g' leurs fonctions dérivées respectives.

1. On donne le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

x	0	$6,85$	$+\infty$
$f(x)$	0 $\nearrow$	$f(6,85)$	$\searrow$ $-\infty$

   (a) Justifier la limite de f en $+\infty$.

   (b) Justifier les variations de la fonction f.

   (c) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

2. (a) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

   (b) Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ on a : $g'(x) = (-0,03x + 0,29)\mathrm{e}^{0,2x}$.

   (c) Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations sur $[0\ ;\ +\infty[$. Préciser une valeur approchée à 10^{-2} près du maximum de g.

   (d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle et déterminer, à 10^{-2} près, une valeur approchée de cette solution.

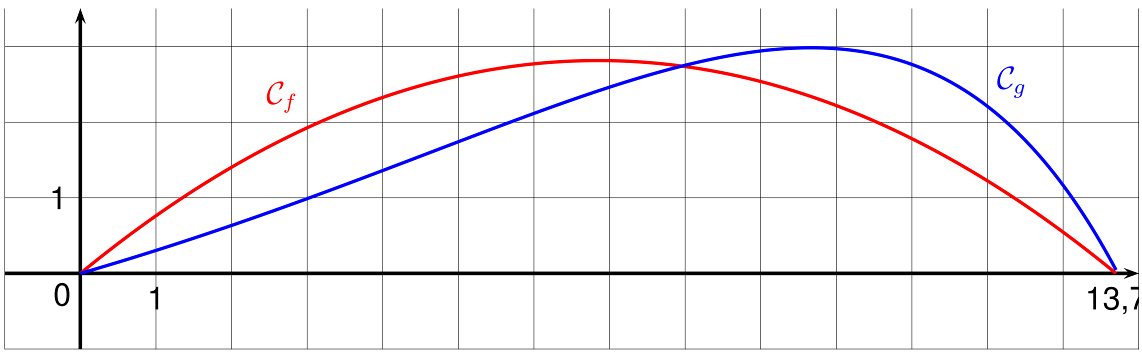
Partie B : trajectoires d'une balle de golf

Pour frapper la balle, un joueur de golf utilise un instrument appelé club de golf.

On souhaite exploiter les fonctions f et g étudiées en Partie A pour modéliser de deux façons différentes la trajectoire d'une balle de golf. On suppose que le terrain est parfaitement plat.

On admettra ici que $13,7$ est la valeur qui annule la fonction f et une approximation de la valeur qui annule la fonction g.

On donne ci-dessous les représentations graphiques de f et g sur l'intervalle [0 ; 13,7].

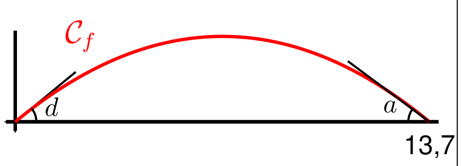
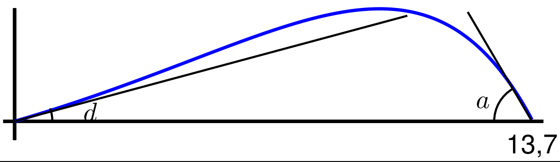


Pour x représentant la distance horizontale parcourue par la balle en dizaine de yards après la frappe, (avec $0 < x < 13,7$), $f(x)$ (ou $g(x)$ selon le modèle) représente la hauteur correspondante de la balle par rapport au sol, en dizaine de yards (1 yard correspond à environ $0,914$ mètre).

On appelle angle de décollage de la balle, l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe ($\mathcal{C}_f$ ou $\mathcal{C}_g$ selon le modèle) en son point d'abscisse 0. Une mesure de l'angle de décollage de la balle est un nombre réel d tel que $\tan(d)$ est égal au coefficient directeur de cette tangente.

De même, on appelle angle d'atterrissage de la balle, l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe ($\mathcal{C}_f$ ou $\mathcal{C}_g$ selon le modèle) en son point d'abscisse $13,7$. Une mesure de l'angle d'atterrissage de la balle est un nombre réel a tel que $\tan(a)$ est égal à l'opposé du coefficient directeur de cette tangente.

Tous les angles sont mesurés en degré.

Le schéma illustre les angles de décollage et d'atterrissage associés à la courbe $\mathcal{C}_f$	Le schéma illustre les angles de décollage et d'atterrissage associés à la courbe $\mathcal{C}_g$.
	

1. *Première modélisation* : on rappelle qu'ici, l'unité étant la dizaine de yards, x représente la distance horizontale parcourue par la balle après la frappe et $f(x)$ la hauteur correspondante de la balle.

   Selon ce modèle :

   (a) Quelle est la hauteur maximale, en yard, atteinte par la balle au cours de sa trajectoire ?

   (b) Vérifier que $f'(0) = 0,822$.

   (c) Donner une mesure en degré de l'angle de décollage de la balle, arrondie au dixième. (On pourra éventuellement utiliser le tableau ci-dessous).

   (d) Quelle propriété graphique de la courbe $\mathcal{C}_f$ permet de justifier que les angles de décollage et d'atterrissage de la balle sont égaux ?

2. *Seconde modélisation* : on rappelle qu'ici, l'unité étant la dizaine de yards, x représente la distance horizontale parcourue par la balle après la frappe et $g(x)$ la hauteur correspondante de la balle.

   Selon ce modèle :

   (a) Quelle est la hauteur maximale, en yard, atteinte par la balle au cours de sa trajectoire ?
   On précise que $g'(0) = 0,29$ et $g'(13,7) \approx -1,87$.

   (b) Donner une mesure en degré de l'angle de décollage de la balle, arrondie au dixième. (On pourra éventuellement utiliser le tableau ci-dessous).

   (c) Justifier que 62 est une valeur approchée, arrondie à l'unité près, d'une mesure en degré de l'angle d'atterrissage de la balle.

Tableau : extrait d'une feuille de calcul donnant une mesure en degré d'un angle quand on connait sa tangente :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	$\tan(\theta)$	0,815	0,816	0,817	0,818	0,819	0,82	0,821	0,822	0,823	0,824	0,825	0,826
2	θ en degrés	39,18	39,21	39,25	39,28	39,32	39,35	39,39	39,42	39,45	39,49	39,52	39,56
3													
4	$\tan(\theta)$	0,285	0,286	0,287	0,288	0,289	0,29	0,291	0,292	0,293	0,294	0,295	0,296
5	θ en degrés	15,91	15,96	16,01	16,07	16,12	16,17	16,23	16,28	16,33	16,38	16,44	16,49

Partie C : interrogation des modèles

À partir d'un grand nombre d'observations des performances de joueurs professionnels, on a obtenu les résultats moyens suivants:

Angle de décollage en degré	Hauteur maximale en yard	Angle d'atterrissage en degré	Distance horizontale en yard au point de chute
24	32	52	137

Quel modèle, parmi les deux étudiés précédemment, semble le plus adapté pour décrire la frappe de la balle par un joueur professionnel ? La réponse sera justifiée.