

Une urne contient des jetons blancs et noirs tous indiscernables au toucher.

Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux jetons de cette urne.
On établit la règle de jeu suivante:

- un joueur perd 9 euros si les deux jetons tirés sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux jetons tirés sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux jetons tirés sont de couleurs différentes.

1. On considère que l'urne contient 2 jetons noirs et 3 jetons blancs.

- (a) Modéliser la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
- (b) Calculer la probabilité de perdre 9 € sur une partie.

2. On considère maintenant que l'urne contient 3 jetons blancs et au moins deux jetons noirs mais on ne connaît pas le nombre exact de jetons noirs. On appellera N le nombre de jetons noirs.

- (a) Soit X la variable aléatoire donnant le gain du jeu pour une partie.
Déterminer la loi de probabilité de cette variable aléatoire.
- (b) Résoudre l'inéquation pour x réel:

$$-x^2 + 30x - 81 > 0$$

- (c) En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer le nombre de jetons noirs que l'urne doit contenir afin que ce jeu soit favorable au joueur.
- (d) Combien de jetons noirs le joueur doit-il demander afin d'obtenir un gain moyen maximal ?
- 3. On observe 10 joueurs qui tentent leur chance en effectuant une partie de ce jeu, indépendamment les uns des autres. On suppose que 7 jetons noirs ont été placés dans l'urne (avec 3 jetons blancs). Quelle est la probabilité d'avoir au moins 1 joueur gagnant 5 euros?