Parmi les angines, un quart nécessite la prise d'antibiotiques, les autres non.

Afin d'éviter de prescrire inutilement des antibiotiques, les médecins disposent d'un test de diagnostic ayant les caractéristiques suivantes :

- lorsque l'angine nécessite la prise d'antibiotiques, le test est positif dans 90 % des cas;
- lorsque l'angine ne nécessite pas la prise d'antibiotiques, le test est négatif dans 95 % des cas.

Les probabilités demandées dans la suite de l'exercice seront arrondies à 10^{-4} près si nécessaire.

Partie 1

Un patient atteint d'angine et ayant subi le test est choisi au hasard.
On considère les évènements suivants :

- A : ń le patient est atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques ż ;
- T : ń le test est positif ż ;
- $\overline{A}$ et $\overline{T}$ sont respectivement les évènements contraires de A et T.

1. Calculer $P(A \cap T)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(T) = 0.262{,}5$.
3. On choisit un patient ayant un test positif. Calculer la probabilité qu'il soit atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques.
4. (a) Parmi les évènements suivants, déterminer ceux qui correspondent à un résultat erroné du test : $A \cap T$, $\overline{A} \cap T$, $A \cap \overline{T}$, $\overline{A} \cap \overline{T}$.
   (b) On définit l'évènement E : ń le test fournit un résultat erroné ż.
   Démontrer que $p(E) = 0.062{,}5$.

Partie 2

On sélectionne au hasard un échantillon de n patients qui ont été testés.
On admet que l'on peut assimiler ce choix d'échantillon à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de patients de cet échantillon ayant un test erroné.

1. On suppose que $n = 50$.
   (a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,\ p)$ de paramètres $n = 50$ et $p = 0.062{,}5$.
   (b) Calculer $P(X = 7)$.
   (c) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un patient dans l'échantillon dont le test est erroné.
2. Quelle valeur minimale de la taille de l'échantillon faut-il choisir pour que $P(X \geqslant 10)$ soit supérieure à $0,95$?