Partie 1

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par:

$$g(x) = \frac{2\ln x}{x}.$$

1. On note g' la dérivée de g. Démontrer que pour tout réel x strictement positif :

$$g'(x) = \frac{2 - 2\ln x}{x^2}.$$

2. On dispose de ce tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$:

x	0	1	e	$+\infty$
Variations de g	‖ $-\infty$ ↗	0 ↗	$\frac{2}{\text{e}}$ ↘	0

Justifier les informations suivantes lues dans ce tableau:

(a) la valeur $\frac{2}{\text{e}}$;

(b) les variations de la fonction g sur son ensemble de définition ;

(c) les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

3. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = [\ln(x)]^2.$$

Dans cette partie, chaque étude est effectuée sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

1. Démontrer que sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, la fonction f est une primitive de la fonction g.

2. À l'aide de la partie 1, étudier :

(a) la convexité de la fonction f ;

(b) les variations de la fonction f.

3. (a) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse e.

(b) En déduire que, pour tout réel x dans $]0\ ;\ \text{e}]$:

$$[\ln(x)]^2 \geqslant \frac{2}{\text{e}}x - 1.$$