

Partie 1

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par:

$$g(x) = \frac{2 \ln x}{x}.$$

- On note g' la dérivée de g . Démontrer que pour tout réel x strictement positif :

$$g'(x) = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2}.$$

- On dispose de ce tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$:

x	0	1	e	$+\infty$
Variations de g			$\frac{2}{e}$	0

The diagram shows a graph of the function g(x) = 2 ln(x)/x. The x-axis has points 0, 1, e, and +∞. At x=0, the function goes from negative infinity towards zero. At x=1, the function is at zero. As x increases towards e, the function increases, reaching a local maximum at approximately (e, 2/e). For x > e, the function decreases back towards zero. Arrows indicate the behavior of the function as x approaches 1 from the left, e from the left, and +∞.

Justifier les informations suivantes lues dans ce tableau:

- la valeur $\frac{2}{e}$;
 - les variations de la fonction g sur son ensemble de définition ;
 - les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.
- En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = [\ln(x)]^2.$$

Dans cette partie, chaque étude est effectuée sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

- Démontrer que sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, la fonction f est une primitive de la fonction g .
- À l'aide de la partie 1, étudier :
 - la convexité de la fonction f ;
 - les variations de la fonction f .
- (a) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse e .
 (b) En déduire que, pour tout réel x dans $]0 ; e]$:

$$[\ln(x)]^2 \geq \frac{2}{e}x - 1.$$