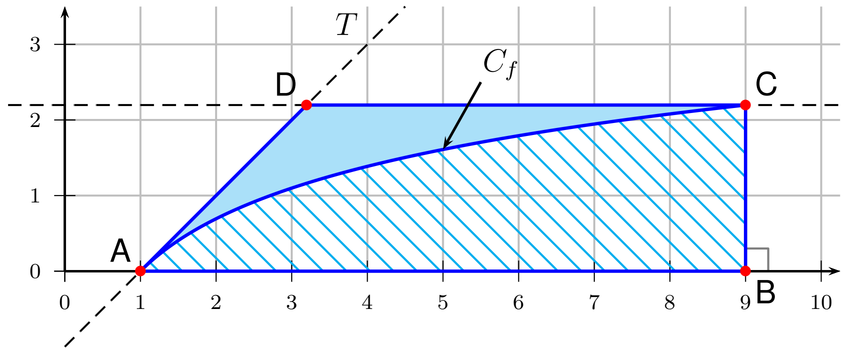
Vous traiterez 4 questions au choix parmi les 6 questions proposées.

Les questions 1, 2 et 3 reposent sur la figure 1 donnée ci-dessous :

Figure 1



- Sur la figure 1 ci-dessus, l'unité de longueur est le centimètre ;
- la courbe C_f tracée est celle de la fonction f définie sur $[1\ ;\ 9]$ par $f(x) = \ln(x)$;
- la droite T est la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse 1 ;
- le point B a pour coordonnées $(9\ ;\ 0)$;
- C est le point de C_f d'abscisse 9 ;
- la parallèle à l'axe des abscisses passant par C coupe la droite T au point D.

On désigne par Δ le domaine hachuré sur la figure 1, délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et le segment [BC]. On note A_2 l'aire de Δ, exprimée en cm^2.

Question 1

Calcul de l'aire A_1 du trapèze ABCD :

1. Justifier que la tangente T a pour équation réduite $y = x - 1$.

On admet que le point D a pour coordonnées : $(2\ln(3) + 1\ ;\ 2\ln(3))$.

2. Démontrer que la valeur de A_1, exprimée en cm^2, est égale à :

$$16\ln(3) - 2(\ln(3))^2.$$

Question 2

Dans le but d'utiliser la méthode des rectangles pour estimer A_2, on a écrit la fonction Python ci-dessous :

[frame=single, language=Python, basicstyle=, `breaklines=true, xleftmargin=80pt, xrightmargin`
`from math import log as ln def` `meth`$_rect(pas) : s = 0x = 1whilex < 9 : s = s + ln(x) * pasx = x + pasreturns$

1. Laquelle des figures ci-dessous correspond à l'exécution de l'instruction `meth_rect(2)` ?
   Aucune justification n'est attendue.

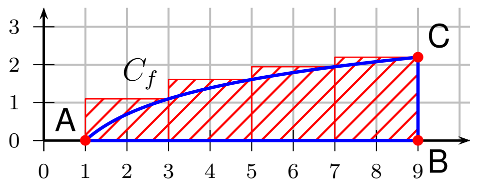


Figure 2

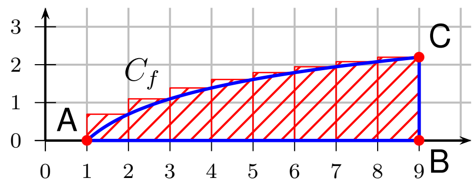


Figure 3

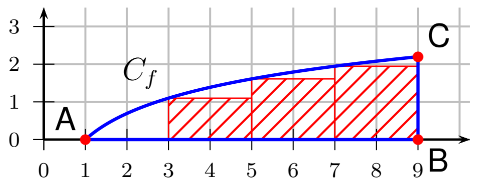


Figure 4

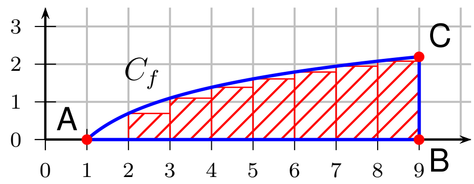


Figure 5

2. Comparer A_2 à la valeur `9.307920700315046` renvoyée par l'exécution de `meth_rect(2)`.

Question 3

Calcul de la valeur exacte de A_2 :

1. Démontrer que la fonction F définie sur $[1\ ;\ 9]$ par $F(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction f sur $[1\ ;\ 9]$.
2. En déduire la valeur exacte de A_2.

Question 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

1. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = (-3x+1)\mathrm{e}^{-x}$.
2. Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Question 5

Le triangle PQR a les propriétés suivantes où la mesure de l'angle est exprimée en radians :

- PQ = 5
- QR = 3
- $\widehat{PQR} = \dfrac{\pi}{3}$

Déterminer la longueur PR.

Question 6

Soit φ un réel appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ \pi[$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \cos(3t+\varphi)$.

1. Montrer que pour tout réel t, $f''(t) + 9f(t) = 0$.

2. Déterminer la valeur de φ telle que $f(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.