*Les résultats seront arrondis si besoin à $10^{-4}$ près*

Une étude statistique réalisée dans une entreprise fournit les informations suivantes :

- 48 % des salariés sont des femmes. Parmi elles, 16,5 % exercent une profession de cadre ;
- 52 % des salariés sont des hommes. Parmi eux, 21,5 % exercent une profession de cadre.

On choisit une personne au hasard parmi les salariés. On considère les évènements suivants:

- $F$: la personne choisie est une femme ;
- $C$: la personne choisie exerce une profession de cadre .

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que la personne choisie soit une femme qui exerce une profession de cadre.
3. (a) Démontrer que la probabilité que la personne choisie exerce une profession de cadre est égale à $0,191$.

   (b) Les évènements $F$ et $C$ sont-ils indépendants ? Justifier.
4. Calculer la probabilité de $F$ sachant $C$, notée $P_C(F)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
5. On choisit au hasard un échantillon de $15$ salariés. Le grand nombre de salariés dans l'entreprise permet d'assimiler ce choix à un tirage avec remise.

   On note $X$ la variable aléatoire donnant le nombre de cadres au sein de l'échantillon de 15 salariés.

   On rappelle que la probabilité qu'un salarié choisi au hasard soit un cadre est égale à $0,191$.

   (a) Justifier que $X$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   (b) Calculer la probabilité que l'échantillon contienne au plus 1 cadre.

   (c) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $X$.
6. Soit $n$ un entier naturel.

   On considère dans cette question un échantillon de $n$ salariés.

   Quelle doit être la valeur minimale de $n$ pour que la probabilité qu'il y ait au moins un cadre au sein de l'échantillon soit supérieure ou égale à $0,99$ ?