Dans cet exercice, seulement 4 questions au choix parmi les 6 questions proposées sont à traiter. Toutes ces questions sont indépendantes les unes des autres.

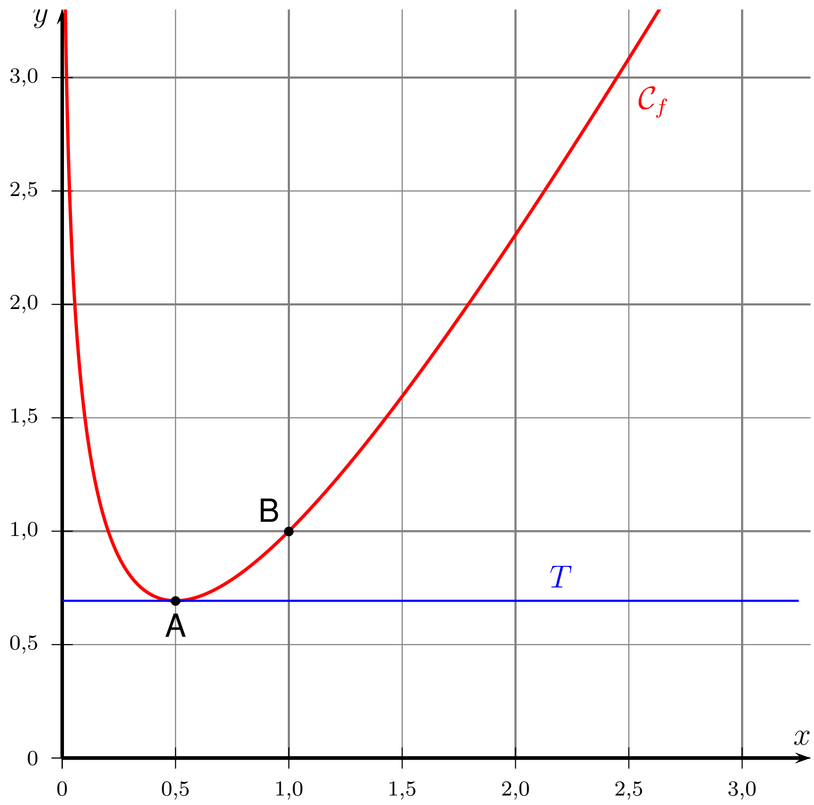
Question 1

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = ax + b - \ln(x)$ où a et b sont des réels. On note $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f tracée dans le repère ci-dessous.

On note A le point d'abscisse $0,5$ appartenant à la courbe $\mathcal{C}_f$.

On note T la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A. La droite T est parallèle à l'axe des abscisses.

Le point $B(1\ ;\ 1)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$.



1. Donner la valeur de $f(1)$. En déduire une relation entre a et b.
2. Justifier que $f'(0,5) = 0$. En déduire la valeur de a.
3. En déduire la valeur de b.

Question 2

Une entreprise achète une machine d'une valeur de 300,000 €. Cette machine perd de sa valeur au fil des années. Cette perte exprimée en euro, à l'instant t exprimé en année, est modélisée par la fonction f définie sur [0 ; 15] par:

$$f(t) = 300{,}000\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}09t}\right).$$

Au bout de combien d'années (résultat arrondi à l'unité) la machine aura-t-elle perdu la moitié de sa valeur ?

Question 3

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 2x - 1 - \ln(x)$.

1. Montrer que pour tout x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2x-1}{x}$.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$ en faisant figurer la valeur exacte de son extremum. On précisera les limites aux bornes de l'intervalle.

Question 4

1. On considère l'équation différentielle (E) : $\quad y' + 0.043{,}4y = 0$.

   Déterminer sur $[0\ ;\ +\infty[$ la solution P de cette équation différentielle qui vérifie la condition initiale $y(0) = 6,75$.
2. Un signal de puissance initiale $P(0) = 6,75$ mW parcourt une fibre optique. La puissance du signal, exprimée en mW, lorsque celui-ci a parcouru une distance de x kilomètres depuis l'entrée de la fibre optique, est donnée par $P(x)$ où P est la fonction déterminée à la question **1.**

   Montrer que la perte de puissance une fois que le signal a parcouru un kilomètre depuis l'entrée est d'environ 287 μW.

Question 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 5x + 4)\,\mathrm{e}^x$.
Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (x^2 + 3x + 1)\,\mathrm{e}^x$.

1. Montrer que, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)$x̣.

Question 6

Rappel : pour a et b deux réels, on a les formules suivantes :

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

La tension u aux bornes d'un générateur dépendant du temps t est donnée par:

$$u(t) = 240\cos(50t) - 240\sin(50t).$$

La tension u est exprimée en volt et le temps t est exprimé en seconde.

1. Montrer que pour tout t appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$, $u(t) = 240\sqrt{2}\cos\left(50t + \dfrac{\pi}{4}\right)$
2. En déduire la fréquence $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$, exprimée en Hz, délivrée par le générateur, où ω désigne la pulsation. On arrondira le résultat à l'unité.