Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$,par:

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x).$$

PARTIE A: Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = 2(x-1) - x\ln(x).$$

On note g' la fonction dérivée de g. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

1. Calculer $g(1)$ et $g(\mathrm{e})$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +0} g(x)$ en justifiant votre démarche.
3. Montrer que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1 - \ln(x)$.
   En déduire le tableau des variations de g sur $]0\ ;\ +\infty[$.
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions distinctes sur $]0\ ;\ +\infty[$: 1 et α avec α appartenant à l'intervalle $[\mathrm{e}\ ;\ +\infty[$.
   On donnera un encadrement de α à 0,01 près.
5. En déduire le tableau de signes de g sur $]0\ ;\ +\infty[$.

PARTIE B : Étude de la fonction f

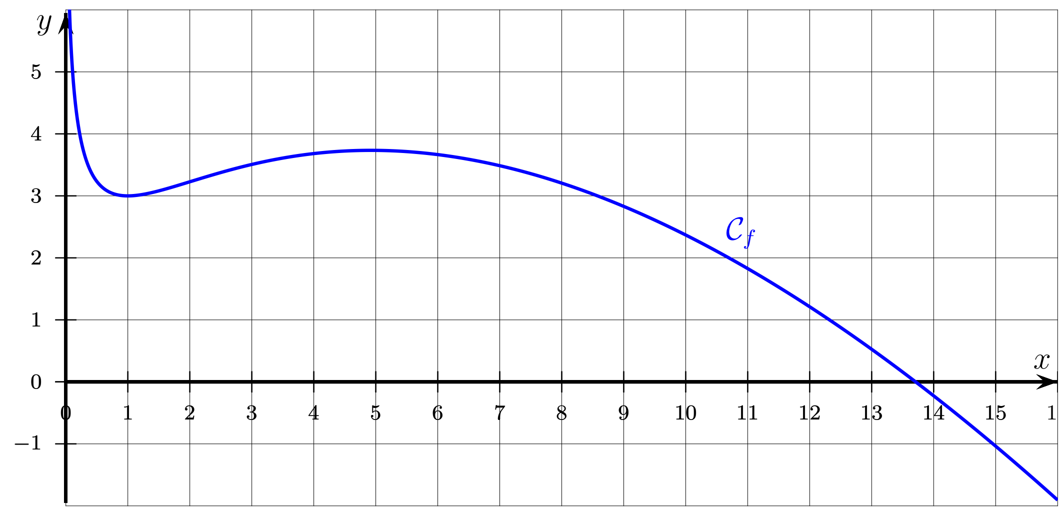
On considère dans cette partie la fonction f, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$,par

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de f.

La représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de cette fonction f est donnée dans le repère $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ ci-dessous.

On admet que : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.



1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ en justifiant votre démarche.
2. (a) Justifier que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

   (b) En déduire le tableau des variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
3. On admet que, pour tout $x > 0$, la dérivée seconde de f, notée f'', est définie par $f''(x) = \dfrac{2-x}{x^2}$.

   Étudier la convexité de f et préciser les coordonnées du point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.