Dans cet exercice, seulement 4 questions au choix parmi les 6 questions proposées sont à traiter. Toutes ces questions sont indépendantes les unes des autres.

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, et i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Question 1

On considère le nombre complexe $z_1 = \dfrac{2-6\text{i}}{2-\text{i}}$.
Déterminer la forme algébrique de z_1.

Question 2

Soit z_2 le nombre complexe défini par: $z_2 = -2-2\text{i}$.

1. Déterminer la forme exponentielle de z_2.
2. Montrer que z_2^4 est un nombre réel que l'on déterminera.

Question 3

On considère A, B et C les points du plan d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 2-2\text{i}, \qquad z_{\text{B}} = -2-2\text{i} \quad \text{et} \quad z_{\text{C}} = -4\text{i}.$$

1. Placer les points A, B et C dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O} ; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ d'unité 1 cm.
2. Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

Question 4

On considère l'équation différentielle :

$$y' + 5y = 7$$

où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. Préciser l'expression de la solution f vérifiant $f(0) = 4$.

Question 5

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = x\ln(x) - x + 4.$$

1. On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, et on note g' sa fonction dérivée.
   Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, $g'(x) = \ln(x)$.

2. En déduire le sens de variation de g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Question 6

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = x^2\text{e}^{-x}.$$

1. Calculer la limite de h en $-\infty$.
2. Justifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$.

On admet que h est strictement décroissante sur l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$ et que l'équation $h(x) = 0,5$ admet une unique solution dans l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$ que l'on note α.

3. Recopier le programme ci-dessous et compléter les pointillés pour que la fonction `sol_bal` détermine une valeur approchée à 10^{-n} près de α par balayage.

```
from math import exp

def sol_bal(n)
   x = 2
   while ...> 0,5
      x = ...
   return x
```