Dans cet exercice, seulement 4 questions au choix parmi les 6 questions proposées sont à traiter. Toutes ces questions sont indépendantes les unes des autres.

Question 1

Pour les deux questions suivantes, indiquer la lettre de la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée.

1. Le nombre $\ln(35)$ est égal à :

   a. $\ln(5) \times \ln(7)$ **b.** $\ln(5) + \ln(7)$ **c.** $\ln(30) + \ln(5)$ **d.** $\ln(30) \times \ln(5)$

2. Le nombre e^{20} est égal à :

   a. $e^4 \times e^5$ **b.** $e^4 + e^5$ **c.** $e^5 + e^{15}$ **d.** $e^5 \times e^{15}$

Question 2

Lors d'une course, on a mesuré la fréquence cardiaque d'un coureur de 100 m.

Cette fréquence cardiaque, en battements par minute, est modélisée par la fonction f définie sur [0; 100] par $f(x) = 28\ \ln(x+1) + 70$ où x est la distance parcourue, en mètre, depuis le départ de la course.

1. Selon ce modèle, quelle est la fréquence cardiaque de ce coureur au départ de la course ?
2. Selon ce modèle, au bout de combien de mètres la fréquence cardiaque de ce sportif est-elle égale à 185 battements par minute ? Arrondir à l'unité.

Question 3

La température d'un four, exprimée en degré Celsius, en fonction du temps t, exprimé en minute, est modélisée par une fonction f définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,2y + 44$.

1. Déterminer les solutions de cette équation différentielle sur [0; $+\infty$[.

On suppose que la température initiale du four est 25 °C.

2. En prenant $f(0) = 25$, donner une expression de $f(t)$, pour tout t de [0; $+\infty$[.

Question 4

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$:

On pose $z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et $z' = -\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

1. Déterminer la forme exponentielle de z. Détailler les calculs.
2. En déduire la forme exponentielle de $\dfrac{z}{z'}$.

Question 5

L'iode 131 est un élément radioactif qui se désintègre selon la loi $N(t) = N(0)\mathrm{e}^{-0{,}086t}$, où $N(0)$ est le nombre de noyaux au début de l'observation et $N(t)$ le nombre de noyaux à l'instant t, exprimé en jour.

Déterminer le temps au bout duquel la moitié des noyaux d'iode 131 se sont désintégrés (demi-vie). On donnera le résultat en nombre de jours arrondi à l'unité.

Question 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$,

1. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Rappel : pour a et b deux réels, on a les formules suivantes :

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$