

Dans cet exercice, seulement 4 questions au choix parmi les 6 questions proposées sont à traiter. Toutes ces questions sont indépendantes les unes des autres.

Question 1

- Montrer, en détaillant vos calculs, que :

$$\ln(2,025) = 4 \ln(3) + 2 \ln(5).$$

- Simplifier le nombre A ci-dessous en détaillant les calculs :

$$A = 2 \ln(e^4) - 3 \ln\left(\frac{1}{e}\right).$$

Question 2

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

On considère le nombre complexe suivant :

$$z = \frac{-1 + i}{3i}.$$

- Mettre z sous forme algébrique. Détailler les calculs.
- Mettre z sous forme exponentielle. Détailler les calculs.

Question 3

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : 2y' + y = 0,$$

où y est une fonction de la variable x , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la fonction dérivée de y .

- Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) .
- Le plan est muni d'un repère.

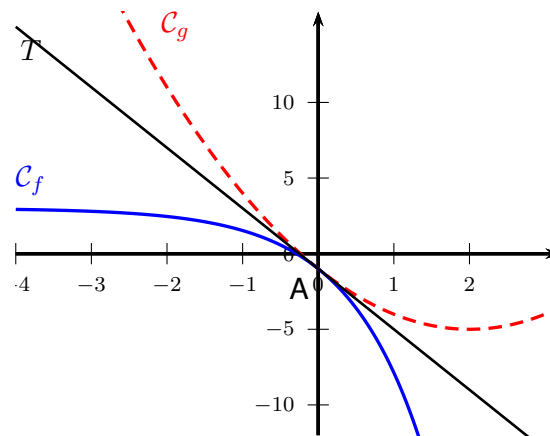
Déterminer la solution f de (E) , dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans ce repère passe par le point $A(\ln(9) ; 1)$.

Question 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a + be^x$, où a et b sont deux nombres réels.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 4x - 1$.

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g , tracées dans le repère orthogonal ci-dessous.



1. On admet que les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un unique point en commun, noté A d'abscisse 0.

Calculer $g(0)$, puis en déduire que $a + b = -1$.

2. On admet que les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont la même tangente T au point A.

- (a) Donner, pour tout réel x , une expression de $g'(x)$ puis calculer $g'(0)$.
(b) En déduire la valeur de b , puis celle de a .

Question 5

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln(x).$$

1. On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x}.$$

2. Montrer que la fonction g admet un minimum, dont on précisera la valeur exacte, sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Question 6

Rappel : pour a et b deux réels, on a les formules suivantes :

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

La tension u , exprimée en volt, aux bornes d'un dipôle en fonction du temps t , exprimé en seconde, est donnée par :

$$u(t) = \cos(50t) + \sqrt{3} \sin(50t).$$

1. Pour tout nombre réel t , écrire $u(t)$ sous la forme $u(t) = U_{\max} \cos(\omega t + \varphi)$ où :

- $U_{\max}$ représente la tension maximale (exprimée en volt) ;
- ω représente la pulsation (exprimée en rad.s^{-1}) ;
- φ représente le déphasage (exprimé en rad).

2. En déduire la fréquence correspondante $f = \frac{\omega}{2\pi}$, exprimée en Hz. Arrondir le résultat à l'unité.