Dans cet exercice, seulement 4 questions au choix parmi les 6 questions proposées sont à traiter. Toutes ces questions sont indépendantes les unes des autres.

Question 1

g est une fonction définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.
On admet que la dérivée de g est la fonction g' définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par:

$$g'(t) = 6\mathrm{e}^{-t}(1-t)\,.$$

1. Étudier le signe de $g'(t)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. En déduire les variations de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Question 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Soit A et B les points d'affixes respectives:

$$z_{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} \text{ et } z_{\mathrm{B}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}.$$

1. Les points A et B sont correctement représentés sur l'une des figures ci-dessous.
   Laquelle ? Aucune justification n'est attendue.

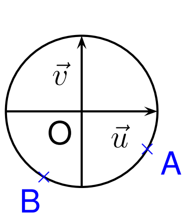

Figure 1

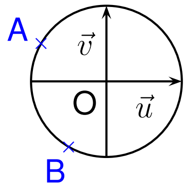

Figure 2

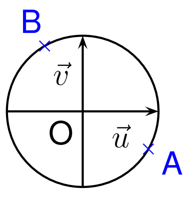

Figure 3

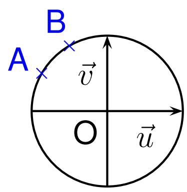

Figure 4

2. Montrer qu'un argument de $\dfrac{z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}}}$ est $\dfrac{-\pi}{2}$.

Question 3

Résoudre dans $]1\ ;\ +\infty[$ l'équation:

$$\ln(x-1) + \ln(x+1) + \ln(x) = \ln\left(x^2-1\right) - \ln(0,5)\,.$$

Question 4

On considère l'équation différentielle (E): $y' = -y + 2$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
2. En déduire la solution f de l'équation différentielle (E) qui s'annule en 0.

Question 5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2e^x$.

1. Montrer que pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $f(x) = e^x\left(x^2 e^{-x} - 2\right)$.
2. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Question 6

Rappel : pour a et b deux réels, on a les formules suivantes :

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

On considère un signal électrique dont l'expression en fonction du temps t est donnée par:

$$u(t) = \sqrt{3}\ \cos(t) - \sin(t)\,.$$

1. Montrer que le signal u peut s'écrire pour tout t réel sous la forme :

$$u(t) = 2\ \cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right).$$

2. Résoudre dans $[0\ ;\ \pi[$, l'équation $u(t) = 1$.

On pourra s'aider du demi-cercle trigonométrique ci-dessous :