

Dans cet exercice, seulement 4 questions au choix parmi les 6 questions proposées sont à traiter. Toutes ces questions sont indépendantes les unes des autres.

Question 1

Une entreprise réalise des bouchons par injection plastique. On modélise la température (en degré Celsius) d'un bouchon plastique à l'issue de sa fabrication, en fonction du temps t (en seconde) par l'équation différentielle :

$$y' = -0,1y + 7.$$

Montrer que la fonction θ définie par $\theta(t) = 80e^{-0,1t} + 70$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ est solution de cette équation différentielle et qu'elle vérifie la condition initiale $\theta(0) = 150$.

Question 2

Soit le nombre complexe $z = -1 + i$.

1. Montrer que $z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
2. Quelle est la partie imaginaire de z^4 ? Justifier.

Question 3

Une voiture électrique, dont l'accumulateur est totalement déchargé, est branchée à une borne de recharge. L'énergie emmagasinée par l'accumulateur (en kilowattheure), notée E , peut être modélisée en fonction du temps t écoulé (en heure) par la fonction E définie pour $t \in [0 ; +\infty[$ par :

$$E(t) = 18 \left(1 - e^{-0,45t}\right).$$

On admet que cette voiture a une énergie de stockage limitée à 18 kWh.

Déterminer l'instant t_0 , arrondi à la minute, à partir duquel la moitié de cette énergie de stockage limite a été emmagasinée.

Question 4

On considère une fonction f dérivable sur $]0 ; +\infty[$ dont la fonction dérivée f' est, donnée, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, par :

$$f'(x) = \frac{-3x + 2}{x}.$$

Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$.

Question 5

On considère l'équation :

$$3 \ln(x) - \ln(x + 30) = 2 \ln(5),$$

où x appartient à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Donner, parmi les quatre propositions suivantes, la solution de cette équation.

- a. 0 b. e^{-5} c. 10 d. 20

Question 6

Une société de peinture utilise, dans le cadre de son activité, une nacelle élévatrice (dite nacelle à ciseaux).

On note $h(t)$ la hauteur (en mètre) de la nacelle à l'instant t (en seconde) suivant la mise en route.

On suppose que h est la fonction de la variable réelle t définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$ d'expression :

$$h(t) = -15e^{-0.2t} + 18.$$

D'après: <https://www.haulotte.fr/produit/h18-sx>

1. Déterminer la hauteur initiale de la nacelle.
2. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$. Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.