

Filtre et fonction de transfert

Un filtre dans un circuit électrique permet de transmettre sélectivement certaines composantes du spectre en fréquence d'un signal.

On considère le filtre, composé d'une résistance R et d'un condensateur C .

On appelle fonction de transfert de ce filtre, la fonction H définie par :

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + RC\omega \cdot i}$$

où :

- i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$ vérifiant $i^2 = -1$;
- R est la résistance, exprimée en Ohm, ayant pour valeur $10^6 \Omega$;
- C est la capacité du condensateur, exprimée en Farad, ayant pour valeur 10^{-6} F ;
- ω est la pulsation du signal aux bornes du circuit, exprimée en rad.s^{-1} .

La pulsation de coupure du filtre est définie par $\omega_C = \frac{1}{RC}$.

1. Calculer ω_C , puis montrer que $H(\omega_C) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.
2. Écrire $H(\omega_C)$ sous forme exponentielle.

La réponse en gain du circuit, notée G_{dB} et exprimée en décibel, vaut pour cette fréquence de coupure :

$$G_{dB} = 20 \log(|H(\omega_C)|),$$

où $|H(\omega_C)|$ est le module de $H(\omega_C)$.

3. Montrer que $G_{dB} = -10 \log(2)$.

On pose en cascade un deuxième filtre identique de même pulsation de coupure qui est tel que la fonction de transfert de ces deux filtres, notée $H_T(\omega_C)$, est égale au produit des fonctions de transfert de chacun des deux filtres. Ainsi :

$$H_T(\omega_C) = H(\omega_C) \times H(\omega_C).$$

4. Dédire de la question 2 le module et un argument de $H_T(\omega_C)$.