Principaux domaines abordés : Suites; Fonctions, Fonction exponentielle.

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par:

$$f(x) = 1 + x - \mathrm{e}^{0,5x-2}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa dérivée.

1. (a) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

   (b) Démontrer que, pour tout réel x non nul, $f(x) = 1 + 0,5x\left(2 - \dfrac{\mathrm{e}^{0,5x}}{0,5x} \times \mathrm{e}^{-2}\right)$.

   En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. (a) Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x.

   (b) Démontrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) < 0$ est l'intervalle $]4 + 2\ln(2) ; +\infty[$.

3. Déduire des questions précédentes le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On fera figurer la valeur exacte de l'image de $4 + 2\ln(2)$ par f.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-1 ; 0]$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie à la partie A.

1. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$

   (b) En déduire que la suite (u_n) converge. On notera ℓ la limite.

2. (a) On rappelle que f vérifie la relation $\ell = f(\ell)$.
   Démontrer que $\ell = 4$.

   (b) On considère la fonction `valeur` écrite ci-contre dans le langage Python :

```
def valeur (a) :
  u = 0
  n = 0
  while u ⩽ a:
    u=1 + u - exp(0.5*u - 2)
    n = n+1
  return n
```

   L'instruction `valeur`(3.99) renvoie la valeur 12.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.