Dans cet exercice, seulement 4 questions au choix parmi les 6 questions proposées sont à traiter. Toutes ces questions sont indépendantes les unes des autres.

Question 1

1. Montrer, en détaillant vos calculs, que :

$$\ln(2{,}025) = 4\ln(3) + 2\ln(5).$$

2. Simplifier le nombre A ci-dessous en détaillant les calculs :

$$A = 2\ln\left(\mathrm{e}^4\right) - 3\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$

Question 2

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
On considère le nombre complexe suivant :

$$z = \frac{-1+\mathrm{i}}{3\mathrm{i}}.$$

1. Mettre z sous forme algébrique. Détailler les calculs.
2. Mettre z sous forme exponentielle. Détailler les calculs.

Question 3

On considère l'équation différentielle :

$$(E): \quad 2y' + y = 0,$$

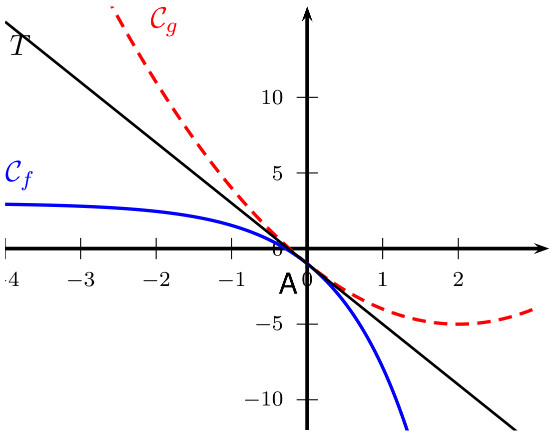
où y est une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).
2. Le plan est muni d'un repère.

   Déterminer la solution f de (E), dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans ce repère passe par le point A$(\ln(9)\ ;\ 1)$.

Question 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a + b\mathrm{e}^x$, où a et b sont deux nombres réels.
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par$g(x) = x^2 - 4x - 1$.
On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g, tracées dans le repère orthogonal ci-dessous.



1. On admet que les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un unique point en commun, noté A d'abscisse 0.

   Calculer $g(0)$, puis en déduire que $a+b=-1$.

2. On admet que les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont la même tangente T au point A.

   (a) Donner, pour tout réel x, une expression de $g'(x)$ puis calculer $g'(0)$.

   (b) En déduire la valeur de b, puis celle de a.

Question 5

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln(x).$$

1. On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$:

$$g'(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{x}.$$

2. Montrer que la fonction g admet un minimum, dont on précisera la valeur exacte, sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Question 6

Rappel : pour a et b deux réels, on a les formules suivantes :

- $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$

La tension u, exprimée en volt, aux bornes d'un dipôle en fonction du temps t, exprimé en seconde, est donnée par :

$$u(t) = \cos(50t) + \sqrt{3}\sin(50t).$$

1. Pour tout nombre réel t, écrire $u(t)$ sous la forme $u(t) = U_{\text{max}}\cos(\omega t + \varphi)$ où :
   - U_{max} représente la tension maximale (exprimée en volt) ;
   - ω représente la pulsation (exprimée en rad.s^{-1}) ;
   - φ représente le déphasage (exprimé en rad).
2. En déduire la fréquence correspondante $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$, exprimée en Hz. Arrondir le résultat à l'unité.