Filtre et fonction de transfert

Un filtre dans un circuit électrique permet de transmettre sélectivement certaines composantes du spectre en fréquence d'un signal.

On considère le filtre, composé d'une résistance R et d'un condensateur C.

On appelle fonction de transfert de ce filtre, la fonction H définie par:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + RC\omega \cdot \mathrm{i}}$$

où :

- i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$ vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$;
- R est la résistance, exprimée en Ohm, ayant pour valeur $10^6 \Omega$;
- C est la capacité du condensateur, exprimée en Farad, ayant pour valeur 10^{-6} F ;
- ω est la pulsation du signal aux bornes du circuit, exprimée en rad.s^{-1}.

La pulsation de coupure du filtre est définie par $\omega_{\mathrm{C}} = \frac{1}{RC}$.

1. Calculer ω_c, puis montrer que $H(\omega_c) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$.
2. Écrire $H(\omega_c)$ sous forme exponentielle.

La réponse en gain du circuit, notée G_{dB} et exprimée en décibel, vaut pour cette fréquence de coupure :

$$G_{dB} = 20 \log\left(\left|H(\omega_c)\right|\right),$$

où $\left|H(\omega_c)\right|$ est le module de $H(\omega_c)$.

3. Montrer que $G_{dB} = -10\log(2)$.

On pose en cascade un deuxième filtre identique de même pulsation de coupure qui est tel que la fonction de transfert de ces deux filtres, notée $H_T(\omega_c)$, est égale au produit des fonctions de transfert de chacun des deux filtres. Ainsi :

$$H_T(\omega_c) = H(w_c) \times H(\omega_c).$$

4. Déduire de la question 2 le module et un argument de $H_T(\omega_c)$.