Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère:

- le point A de coordonnées $(-1 ; 1 ; 3)$,
- la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est: $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 2+2t \end{cases}$

On admet que le point A n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$.

1. (a) Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathcal{D}$.
   (b) Montrer que le point B$(-1 ; 3 ; 0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.
   (c) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}$.
2. On note $\mathcal{P}$ le plan passant par le point A et orthogonal à la droite $\mathcal{D}$, et on appelle H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$. Ainsi, H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathcal{D}$.
   (a) Montrer que le plan $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne: $2x - y + 2z - 3 = 0$.
   (b) En déduire que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9} ; \frac{19}{9} ; \frac{16}{9}\right)$.
   (c) Calculer la longueur AH. On donnera une valeur exacte.
3. Dans cette question, on se propose de retrouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathcal{D}$, par une autre méthode.
   On rappelle que le point B$(-1 ; 3 ; 0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ et que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.
   (a) Justifier qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.
   (b) Montrer que $k = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|^2}$.
   (c) Calculer la valeur du nombre réel k et retrouver les coordonnées du point H.
4. On considère un point C appartenant au plan $\mathcal{P}$ tel que le volume du tétraèdre ABCH soit égal à $\frac{8}{9}$.
   Calculer l'aire du triangle ACH.
   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par: $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.