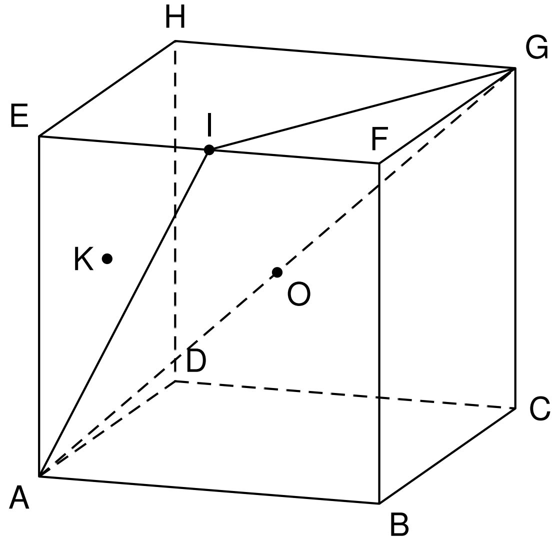
On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.

L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$. Le point I est le milieu du segment [EF], K le centre du carré ADHE et O le milieu du segment [AG].



Le but de l'exercice est de calculer de deux manières différentes, la distance du point B au plan (AIG).

Partie 1. Première méthode

1. Donner, sans justification, les coordonnées des points A, B, et G.

   On admet que les points I et K ont pour coordonnées $I\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,1\right)$ et $K\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.
2. Démontrer que la droite (BK) est orthogonale au plan (AIG).
3. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (AIG) est : $2x - y - z = 0$.
4. Donner une représentation paramétrique de la droite (BK).
5. En déduire que le projeté orthogonal L du point B sur le plan (AIG) a pour coordonnées $L\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.
6. Déterminer la distance du point B au plan (AIG).

Partie 2. Deuxième méthode

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times b \times h$, où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.

1. (a) Justifier que dans le tétraèdre ABIG, [GF] est la hauteur relative à la base AIB.
   (b) En déduire le volume du tétraèdre ABIG.

2. On admet que AI = IG $= \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ et que AG $= \sqrt{3}$.

   Démontrer que l'aire du triangle isocèle AIG est égale à $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ unité d'aire.

3. En déduire la distance du point B au plan (AIG).