Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x de]0 ; 1] par:

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} + \ln(x).$$

1. Calculer la limite de f en 0.
2. On admet que f est dérivable sur]0 ; 1]. On note f' sa fonction dérivée.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à]0 ; 1], on a :
   $$f'(x) = \frac{1 - x\mathrm{e}^{-x}}{x}$$
3. Justifier que, pour tout réel x appartenant à]0 ; 1], on a $x\mathrm{e}^{-x} < 1$.
   En déduire le tableau de variation de f sur]0 ; 1].
4. Démontrer qu'il existe un unique réel ℓ appartenant à]0 ; 1] tel que $f(\ell) = 0$.

Partie B

1. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par:
   $$\left\{\begin{array}{lcl} a_0 & = & \frac{1}{10} \\ b_0 & = & 1 \end{array}\right. \text{ et, pour tout entier naturel } n, \left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \mathrm{e}^{-b_n} \\ b_{n+1} & = & \mathrm{e}^{-a_n} \end{array}\right.$$
   (a) Calculer a_1 et b_1. On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près.
   (b) On considère ci-dessous la fonction `termes`, écrite en langage Python.

```
def termes (n) :
  a=1/10
  b=1
  for k in range(0,n) :
    c= ...
    b = ...
    a = c
  return(a,b)
```

   Recopier et compléter sans justifier le cadre ci-dessus de telle sorte que la fonction termes calcule les termes des suites (a_n) et (b_n).

2. On rappelle que la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :
   $$0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant 1$$

(b) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

3. On note A la limite de (a_n) et B la limite de (b_n).
   On admet que A et B appartiennent à l'intervalle]0 ; 1], et que $A = \mathrm{e}^{-B}$ et $B = \mathrm{e}^{-A}$.

   (a) Démontrer que $f(A) = 0$.

   (b) Déterminer $A - B$.