Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par:

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 40 \\ u_{n+1} & = & 0,008u_n\,(200-u_n) \end{array}\right.$$

où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2021+n)$.

1. Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2022.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 100] par $f(x)=0,008x(200-x)$.

2. Résoudre dans l'intervalle [0 ; 100] l'équation $f(x)=x$.
3. (a) Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle [0 ; 100] et dresser son tableau de variations.

   (b) En remarquant que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f\,(u_n)$ démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

   $$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100.$$

   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

   (d) Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. On considère l'algorithme suivant:

```
def seuil(p) :
    n=0
    u = 40
    while u < p :
        n =n+1
        u = 0.008*u*(200-u)
    return(n+2021)
```

L'exécution de seuil(100) ne renvoie aucune valeur. Expliquer pourquoi à l'aide de la question 3.