

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :

$A(2 ; 0 ; 3)$, $B(0 ; 2 ; 1)$, $C(-1 ; -1 ; 2)$ et $D(3 ; -3 ; -1)$.

1. Calcul d'un angle

- (a) Calculer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
- (b) Calculer les longueurs AB et AC.
- (c) À l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, déterminer la valeur du cosinus de l'angle \widehat{BAC} puis donner une valeur approchée de la mesure de l'angle \widehat{BAC} au dixième de degré.

2. Calcul d'une aire

- (a) Déterminer une équation du plan \mathcal{P} passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB).
- (b) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
- (c) En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E du point C sur la droite (AB), c'est-à-dire du point d'intersection de la droite (AB) et du plan \mathcal{P}
- (d) Calculer l'aire du triangle ABC.

3. Calcul d'un volume

- (a) Soit le point $F(1 ; -1 ; 3)$. Montrer que les points A, B, C et F sont coplanaires.
- (b) Vérifier que la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).
- (c) Sachant que le volume d'un tétraèdre est égal au tiers de l'aire de sa base multiplié par sa hauteur, calculer le volume du tétraèdre ABCD.