Exercice BAC 2022 Centres Étrangers - Ex 2

Fonction logarithme | Suites numériques | Convexité | Récurrence | Limites | Dérivation

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x) + 1$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 ainsi que sa limite en $+\infty$.

2. (a) On admet que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on notera f' sa fonction dérivée.
   Montrer que pour tout réel x strictement positif :

   $$f'(x) = 1 + \ln(x).$$

   (b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$. On y fera figurer la valeur exacte de l'extremum de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ et les limites.

   (c) Justifier que pour tout $x \in]0\ ;\ 1[$, $f(x) \in]0\ ;\ 1[$.

3. (a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

   (b) Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   (c) En déduire que pour tout réel x strictement positif:

   $$f(x) \geqslant x$$

4. On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0 élément de l'intervalle]0 ; 1[et pour tout entier naturel n :

   $$u_{n+1} = f(u_n)$$

   (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < 1$.

   (b) Déduire de la question 3. c. la croissance de la suite (u_n).

   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

🚀 Retrouve des milliers d'exercices corrigés sur galilee.ac

COOPMATHS CC BY SA
MathALÉA