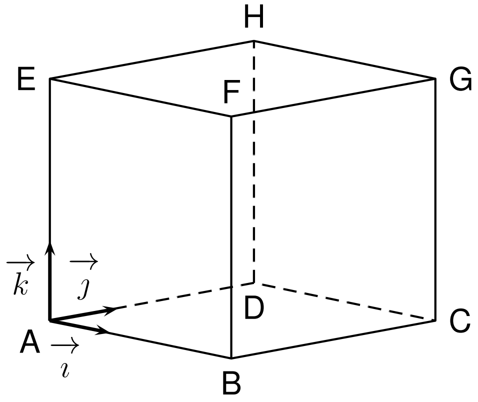
Principaux domaines abordés: Manipulation des vecteurs, des droites et des plans de l'espace. Orthogonalité et distances dans l'espace. Représentations paramétriques et équations cartésiennes.

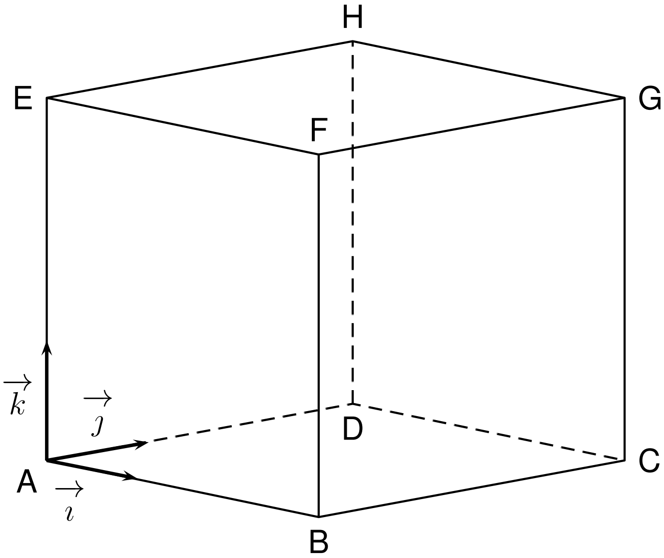
Le solide ABCDEFGH est un cube. On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace dans lequel les coordonnées des points B, D et E sont :

$$\text{B}(3 ; 0 ; 0), \text{D}(0 ; 3 ; 0) \text{ et } \text{E}(0 ; 0 ; 3).$$



On considère les points P(0 ; 0 ; 1), Q(0 ; 2 ; 3) et R(1 ; 0 ; 3).

1. Placer les points P, Q et R sur la figure.



2. Montrer que le triangle PQR est isocèle en R.
3. Justifier que les points P, Q et R définissent un plan.

4. On s'intéresse à présent à la distance entre le point E et le plan (PQR).

   (a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{u}\,(2\ ;\ 1\ ;\ -1)$ est normal au plan (PQR).

   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (PQR).

   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point E et orthogonale au plan (PQR).

   (d) Montrer que le point L$\left(\dfrac{2}{3}\ ;\ \dfrac{1}{3}\ ;\ \dfrac{8}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point E sur le plan (PQR).

   (e) Déterminer la distance entre le point E et le plan (PQR).

5. En choisissant le triangle EQR comme base, montrer que le volume du tétraèdre EPQR est $\dfrac{2}{3}$.

   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire d'une base} \times \text{hauteur correspondante.}$$

6. Trouver, à l'aide des deux questions précédentes, l'aire du triangle PQR.