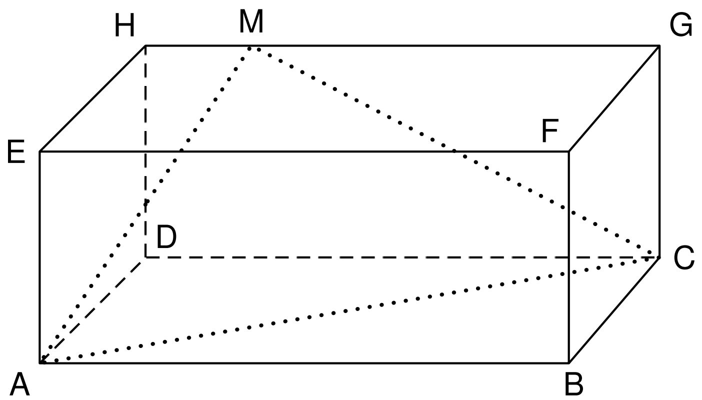
Dans la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que AB $= 5$, AD $= 3$ et AE $= 2$.

L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine A dans lequel les points B, D et E ont respectivement pour coordonnées (5 ; 0 ; 0), (0 ; 3 ; 0) et (0 ; 0 ; 2).



1. (a) Donner, dans le repère considéré, les coordonnées des points H et G.
   (b) Donner une représentation paramétrique de la droite (GH).

2. Soit M un point du segment [GH] tel que $\overrightarrow{\text{HM}} = k\,\overrightarrow{\text{HG}}$ avec k un nombre réel de l'intervalle [0 ; 1].
   (a) Justifier que les coordonnées de M sont $(5k\ ;\ 3\ ;\ 2)$.
   (b) En déduire que $\overrightarrow{\text{AM}} \cdot \overrightarrow{\text{CM}} = 25k^2 - 25k + 4$.
   (c) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles AMC est un triangle rectangle en M.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère que le point M a pour coordonnées (1 ; 3 ; 2).

On admet que le triangle AMC est rectangle en M .

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\frac{1}{3} \times$ Aire de la base $\times\, h$ où h est la hauteur relative à la base.

3. On considère le point K de coordonnées (1 ; 3 ; 0).
   (a) Déterminer une équation cartésienne du plan (ACD).
   (b) Justifier que le point K est le projeté orthogonal du point M sur le plan (ACD).
   (c) En déduire le volume du tétraèdre MACD.

4. On note P le projeté orthogonal du point D sur le plan (AMC).
   Calculer la distance DP ; en donner une valeur arrondie à 10^{-1}.