Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n^2$.

1. (a) Calculer u_1 et u_2.

   (b) Recopier et compléter la fonction ci-dessous écrite en langage Python. Cette fonction est nommée *suite_u* et prend pour paramètre l'entier naturel p.
   Elle renvoie la valeur du terme de rang p de la suite (u_n).

```
def suite_u(p) :
  u= ...
  for i in range(1,...)  :
    u =...
  return u
```

2. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 4$.

   (b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. (a) Justifier que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie l'égalité $\ell = \frac{1}{5}\ell^2$.

   (b) En déduire la valeur de ℓ.

4. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \ln(u_n)$ et $w_n = v_n - \ln(5)$.

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n - \ln(5)$.

   (b) Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 2.

   (c) Pour tout entier naturel n, donner l'expression de w_n en fonction de n et montrer que $v_n = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n + \ln(5)$.

5. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.