Dans cet exercice, on considère la suite (T_n) définie par :

$$T_0 = 180 \text{ et, } \quad \text{pour tout entier naturel } n, \; T_{n+1} = 0,955T_n + 0,9$$

1. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $T_n \geqslant 20$.

   (b) Vérifier que pour tout entier naturel n, $T_{n+1} - T_n = -0,045\,(T_n - 20)$. En déduire le sens de variation de la suite (T_n).

   (c) Conclure de ce qui précède que la suite (T_n) est convergente. Justifier.

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = T_n - 20$.

   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n = 20 + 160 \times 0,955^n$.

   (c) Calculer la limite de la suite (T_n).

   (d) Résoudre l'inéquation $T_n \leqslant 120$ d'inconnue n entier naturel.

3. Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de la température au centre d'un gâteau après sa sortie du four.

   On considère qu'à la sortie du four, la température au centre du gâteau est de 180 C et celle de l'air ambiant de 20 C.

   La loi de refroidissement de Newton permet de modéliser la température au centre du gâteau par la suite précédente (T_n). Plus précisément, T_n représente la température au centre du gâteau, exprimée en degré Celsius, n minutes après sa sortie du four.

   (a) Expliquer pourquoi la limite de la suite (T_n) déterminée à la question 2. c. était prévisible dans le contexte de l'exercice.

   (b) On considère la fonction Python ci-dessous:

```
def temp(x) :
    T = 180
    n = 0
    while T > x :
        T=0.955*T+0.9
        n=n+1
    return n
```

   Donner le résultat obtenu en. exécutant la commande temp(120).

   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.