

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points

$$A(3 ; -2 ; 2), \quad B(6 ; 1 ; 5), \quad C(6 ; -2 ; -1) \quad \text{et} \quad D(0 ; 4 ; -1).$$

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \mathcal{A} \times h$$

où \mathcal{A} est l'aire de la base et h la hauteur correspondante.

1. Démontrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
2. (a) Montrer que le triangle ABC est rectangle.
 (b) Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
 (c) En déduire le volume du tétraèdre ABCD.
3. On considère le point H(5 ; 0 ; 1).
 - (a) Montrer qu'il existe des réels α et β tels que $\overrightarrow{BH} = \alpha \overrightarrow{BC} + \beta \overrightarrow{BD}$.
 - (b) Démontrer que H est le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).
 (c) En déduire la distance du point A au plan (BCD).
4. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle BCD.