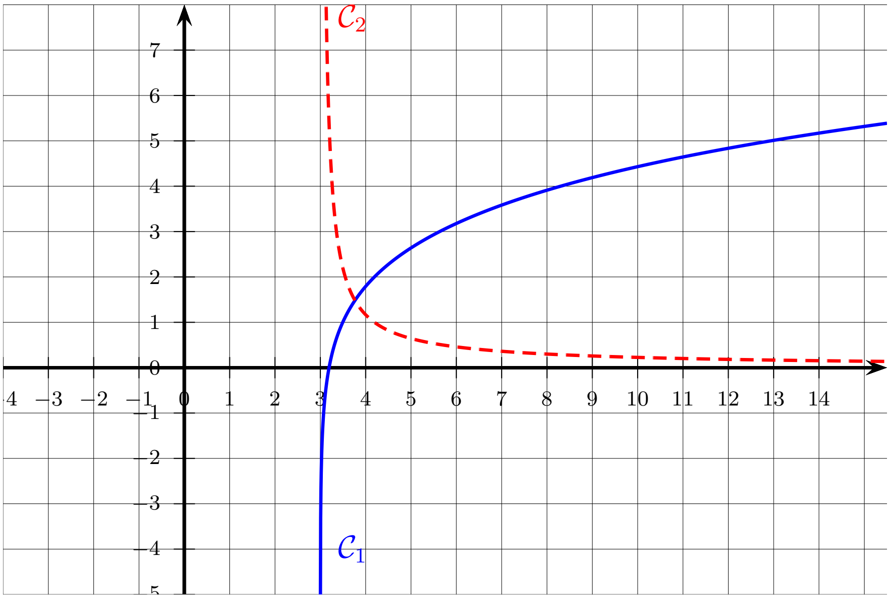
Principaux domaines abordés: Étude des fonctions. Fonction logarithme.

Partie A



Dans le repère orthonormé ci-dessus, sont tracées les courbes représentatives d'une fonction f et de sa fonction dérivée, notée f', toutes deux définies sur $]3\ ;\ +\infty[$.

1. Associer à chaque courbe la fonction qu'elle représente. Justifier.
2. Déterminer graphiquement la ou les solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 3$.
3. Indiquer, par lecture graphique, la convexité de la fonction f.

Partie B

1. Justifier que la quantité $\ln\left(x^2 - x - 6\right)$ est bien définie pour les valeurs x de l'intervalle $]3\ ;\ +\infty[$, que l'on nommera I dans la suite.
2. On admet que la fonction f de la Partie A est définie par $f(x) = \ln\left(x^2 - x - 6\right)$ sur I.
   Calculer les limites de la fonction f aux deux bornes de l'intervalle I.
   En déduire une équation d'une asymptote à la courbe représentative de la fonction f sur I.
3. (a) Calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant à I.
   (b) Étudier le sens de variation de la fonction f sur I.
   Dresser le tableau des variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de I.
4. (a) Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α sur l'intervalle]5 ; 6[.
   (b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de α à 10^{-2} près.
5. (a) Justifier que $f''(x) = \dfrac{-2x^2 + 2x - 13}{\left(x^2 - x - 6\right)^2}$.
   (b) Étudier la convexité de la fonction f sur I.