Les parties B et C sont indépendantes

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x - x\ln x,$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
   (a) Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, on a : $f'(x) = -\ln x$.
   (b) En déduire les variations de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
4. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser avec profit certains résultats de la partie A.
On considère la suite (u_n) définie par:

$$\left\{\begin{array}{lll} u_0 & = & 0,5 \\ u_{n+1} & = & u_n - u_n\ln u_n \text{ pour tout entier naturel } n, \end{array}\right.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$.

1. On rappelle que la fonction f est croissante sur l'intervalle [0,5 ; 1].
   Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0,5 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
2. (a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
   (b) On note ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

Partie C

Pour un nombre réel k quelconque, on considère la fonction f_k définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par:

$$f_k(x) = kx - x\ln x.$$

1. Pour tout nombre réel k, montrer que f_k admet un maximum y_k atteint en $x_k = \mathrm{e}^{k-1}$.
2. Vérifier que, pour tout nombre réel k, on a : $x_k = y_k$.