

Principaux domaines abordés : fonctions, fonction logarithme.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln(x) - x - 2.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

On note f' sa dérivée, f'' sa dérivée seconde et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère.

1. (a) Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0 ; +\infty[$, on a $f'(x) = \ln(x)$.
(b) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse $x = e$.
(c) Justifier que la fonction f est convexe sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
(d) En déduire la position relative de la courbe \mathcal{C}_f et de la tangente T .
2. (a) Calculer la limite de la fonction f en 0.
(b) Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
4. (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$. On note α cette solution.
(b) Justifier que le réel α appartient à l'intervalle $]4,3 ; 4,4[$.
(c) En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
5. On considère la fonction `seuil` suivante écrite dans le langage Python :
On rappelle que la fonction `log` du module `math` (que l'on suppose importé) désigne la fonction logarithme népérien \ln .

```
def seuil(pas) :  
    x=4.3  
    while x*log (x) - x - 2 < 0:  
        x=x+pas  
    return x
```

Quelle est la valeur renvoyée à l'appel de la fonction `seuil(0.01)` ?

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.