

**Principaux domaines abordés :** fonctions, fonction logarithme.

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = x \ln(x) - x - 2.$$

On admet que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ .

On note  $f'$  sa dérivée,  $f''$  sa dérivée seconde et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère.

1. (a) Démontrer que, pour tout  $x$  appartenant à  $]0 ; +\infty[$ , on a  $f'(x) = \ln(x)$ .  
 (b) Déterminer une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $x = e$ .  
 (c) Justifier que la fonction  $f$  est convexe sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .  
 (d) En déduire la position relative de la courbe  $\mathcal{C}_f$  et de la tangente  $T$ .
2. (a) Calculer la limite de la fonction  $f$  en 0.  
 (b) Démontrer que la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$  est égale à  $+\infty$ .
3. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .
4. (a) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution dans l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ . On note  $\alpha$  cette solution.  
 (b) Justifier que le réel  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $]4,3 ; 4,4[$ .  
 (c) En déduire le signe de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .
5. On considère la fonction `seuil` suivante écrite dans le langage Python :

On rappelle que la fonction `log` du module `math` (que l'on suppose importé) désigne la fonction logarithme népérien `ln`.

```
def seuil(pas) :
    x=4.3
    while x*log (x) - x - 2 < 0:
        x=x+pas
    return x
```

Quelle est la valeur renvoyée à l'appel de la fonction `seuil(0.01)` ?

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.