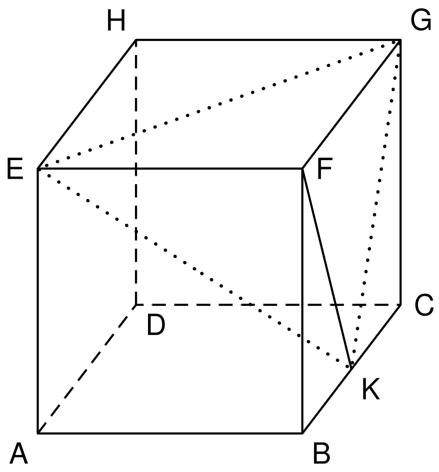
On considère un cube ABCDEFGH et on appelle K le milieu du segment [BC].
On se place dans le repère $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ et on considère le tétraèdre EFGK.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par:

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.



1. Préciser les coordonnées des points E, F, G et K.
2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (EGK).
3. Démontrer que le plan (EGK) admet pour équation cartésienne : $2x - 2y + z - 1 = 0$.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EGK) passant par F.
5. Montrer que le projeté orthogonal L de F sur le plan (EGK) a pour coordonnées $\left(\frac{5}{9} ; \frac{4}{9} ; \frac{7}{9}\right)$.
6. Justifier que la longueur LF est égale à $\frac{2}{3}$.
7. Calculer l'aire du triangle EFG. En déduire que le volume du tétraèdre EFGK est égal à $\frac{1}{6}$.
8. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle EGK.
9. On considère les points P milieu du segment [EG], M milieu du segment [EK] et N milieu du segment[GK]. Déterminer le volume du tétraèdre FPMN.