Soit k un nombre réel.
On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = ku_n\left(1 - u_n\right).$$

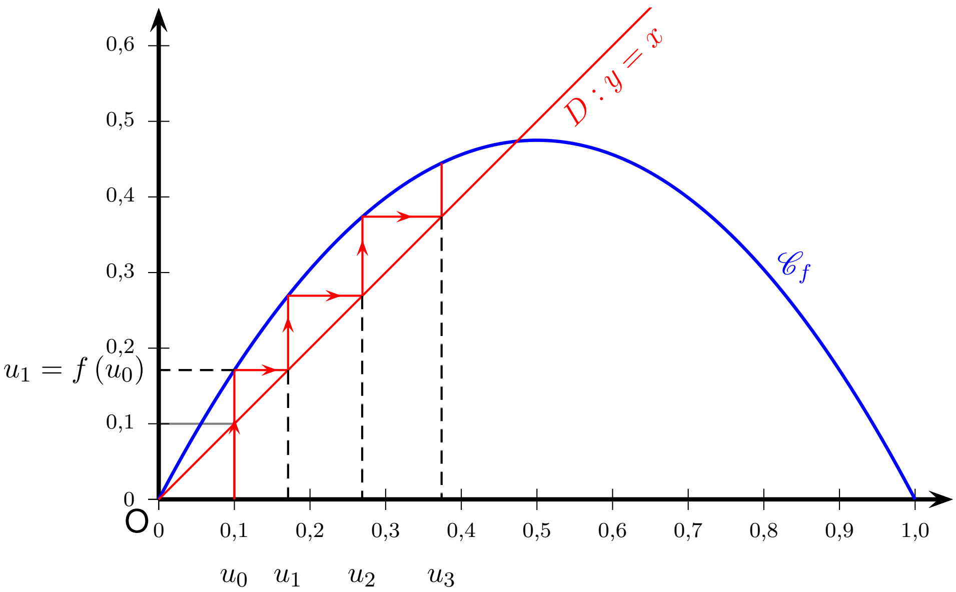
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.
On y étudie deux cas de figure selon les valeurs de k.

Partie 1

Dans cette partie, $k = 1,9$ et $u_0 = 0,1$.
On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,9u_n\left(1 - u_n\right)$.

1. On considère la fonction f définie sur [0 ; 1] par $f(x) = 1,9x(1 - x)$.
   (a) Étudier les variations de f sur l'intervalle [0 ; 1].
   (b) En déduire que si $x \in [0\ ;\ 1]$ alors $f(x) \in [0\ ;\ 1]$.
2. Ci-dessous sont représentés les premiers termes de la suite (u_n) construits à partir de la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f et de la droite D d'équation $y = x$.

   Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.



3. (a) En utilisant les résultats de la question 1, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

   (b) En déduire que la suite (u_n) converge.
   (c) Déterminer sa limite.

Partie 2

Dans cette partie, $k = \frac{1}{2}$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1 - u_n)$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On admet que pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. On considère la fonction Python `algo (p)` où `p` désigne un entier naturel non nul:

```
def algo(p) :
  u =1/4
  n = 0
  while u > 10**(-p):
    u = 1/2*u*(1 - u)
    n = n+1
   return(n)
```

   Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel non nul `p`, la boucle while ne tourne pas indéfiniment, ce qui permet à la commande `algo (p)` de renvoyer une valeur.