Exercice BAC 2022 Nouvelle-Calédonie - Ex 1

Fonction logarithme | Étude de fonctions | Convexité | Dérivation | Limites | Théorème des valeurs intermédiaires

Principaux domaines abordés : fonctions, fonction logarithme; convexité.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 6x + 4\ln(x).$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. (a) Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   En déduire le tableau de variations de f.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle [4 ; 5].
4. On admet que, pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$f''(x) = \frac{2x^2 - 4}{x^2}.$$

   (a) Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   On précisera les valeurs exactes des coordonnées des éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.
   (b) On note A le point de coordonnées $\left(\sqrt{2}\ ;\ f\left(\sqrt{2}\right)\right)$.
   Soit t un réel strictement positif tel que $t \neq \sqrt{2}$. Soit M le point de coordonnées $(t\ ;\ f(t))$.
   En utilisant la question 4. a, indiquer, selon la valeur de t, les positions relatives du segment [AM] et de la courbe $\mathcal{C}_f$.