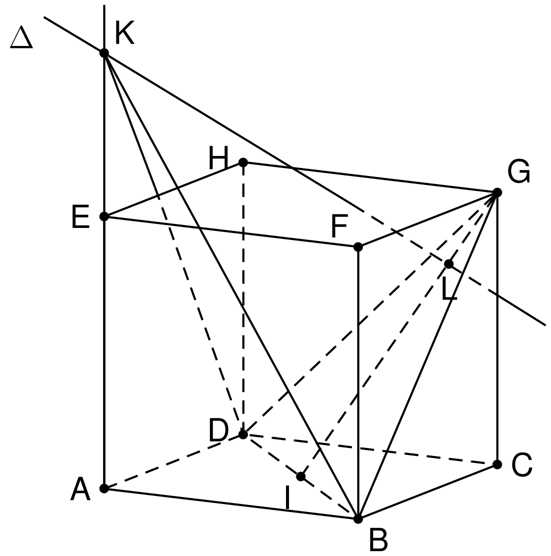
On considère un cube ABCDEFGH de côté 1.



Le point I est le milieu du segment [BD]. On définit le point L tel que $\overrightarrow{\text{IL}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\text{IG}}$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\ ;\ \overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AD}},\ \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

1. (a) Préciser les coordonnées des points D, B, I et G.
   Aucune justification n'est attendue.

   (b) Montrer que le point L a pour coordonnées $\left(\frac{7}{8}\ ;\ \frac{7}{8}\ ;\ \frac{3}{4}\right)$.

2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BDG) est $x + y - z - 1 = 0$.

3. On considère la droite Δ perpendiculaire au plan (BDG) passant par L.

   (a) Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\begin{cases} x = \frac{7}{8} + t \\ y = \frac{7}{8} + t \\ z = \frac{3}{4} - t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

   (b) Montrer que les droites Δ et (AE) sont sécantes au point K de coordonnées $\left(0\ ;\ 0\ ;\ \frac{13}{8}\right)$.

   (c) Que représente le point L pour le point K ? Justifier la réponse.

4. (a) Calculer la distance KL.

   (b) On admet que le triangle DBG est équilatéral.

   Montrer que son aire est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(c) En déduire le volume du tétraèdre KDBG.
On rappelle que :

- le volume d'une pyramide est donné par la formule $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative a cette base ;
- un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire.

5. On désigne par a un réel appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et on note K_a le point de coordonnées $(0\ ;\ 0\ ;\ a)$.

(a) Exprimer le volume $\mathcal{V}_a$ de la pyramide ABCDK_a en fonction de a.

(b) On note Δ_a la droite de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t' \\ y & = & t' \\ z & = & -t' + a \end{array}\right. \quad \text{où } t' \in \mathbb{R}.$$

On appelle L_a le point d'intersection de la droite Δ_a avec le plan (BDG).
Montrer que les coordonnées du point L_a sont $\left(\dfrac{a+1}{3}\ ;\ \dfrac{a+1}{3}\ ;\ \dfrac{2a-1}{3}\right)$.

(c) Déterminer, s'il existe, un réel strictement positif a tel que le tétraèdre GDBK_a et la pyramide ABCDK_a sont de même volume.