Intégration par parties · Fonction exponentielle · Fonction logarithme · Calcul d'aires · Dérivation · Théorème des valeurs intermédiaires · Limites · Étude de fonction

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un artisan crée des bonbons au chocolat dont la forme rappelle le profil de la montage locale représentée en **Figure 1**. La base d'un tel bonbon est modélisée par la surface grisée, définie ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 2 cm (**Figure 2**).

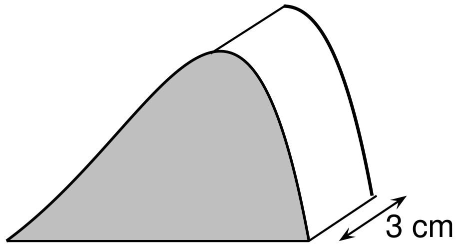

Figure 1

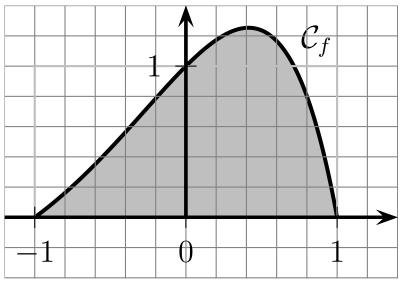

Figure 2

Cette surface est délimitée par l'axe des abscisses et la représentation graphique notée $\mathcal{C}_f$ de la fonction f définie sur $[-1~;~1]$ par :

$$f(x) = \left(1 - x^2\right) \mathrm{e}^x.$$

L'objectif de cette partie est de calculer le volume de chocolat nécessaire à la fabrication d'un bonbon au chocolat.

1. (a) Justifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1~;~1]$ on a $f(x) \geqslant 0$.
   (b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{e}^x \mathrm{d}x.$$

2. Le volume $\mathcal{V}$ de chocolat, en cm3, nécessaire à la fabrication d'un bonbon est donné par :

$$\mathcal{V} = 3 \times S$$

   où S est l'aire, en cm2, de la surface colorée (**Figure 2**).
   En déduire que ce volume $\mathcal{V}$, arrondi à $0,1$ cm3 près, est égal à $4,4$ cm3.

Partie B

On s'intéresse maintenant au bénéfice réalisé par l'artisan sur la vente de ces bonbons au chocolat en fonction du volume hebdomadaire des ventes.

Ce bénéfice peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0,01~;~+\infty[$ par :

$$B(q) = 8q^2[2 - 3\,\ln(q)] - 3.$$

Le bénéfice est exprimé en dizaines d'euros et la quantité q en centaines de bonbons.

On admet que la fonction B est dérivable sur $[0,01~;~+\infty[$. On note B' sa fonction dérivée.

1. (a) Déterminer $\lim\limits_{q \to +\infty} B(q)$.

   (b) Montrer que, pour tout $q \geqslant 0,01$, $B'(q) = 8q(1 - 6\ln(q))$.

   (c) Étudier le signe de $B'(q)$, et en déduire le sens de variation de B sur $[0,01\ ;\ +\infty[$.
   Dresser le tableau de variation complet de la fonction B.

   (d) Quel est le bénéfice maximal, à l'euro près, que peut espérer l'artisan ?

2. (a) Montrer que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution β sur l'intervalle $[1,2\ ;\ +\infty[$.
   Donner une valeur approchée de β à 10^{-3} près.

   (b) On admet que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution α sur $[0,01\ ;\ 1,2[$.
   On donne $\alpha \approx 0,757$.
   En déduire le nombre minimal et le nombre maximal de bonbons au chocolat à vendre pour réaliser un bénéfice supérieur à 100 euros.