

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - x \ln(x).$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée de la fonction f' .

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Pour tout réel x strictement positif, calculer $f'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel x strictement positif:

$$f''(x) = \frac{2x - 1}{x}.$$

4. Étudier les variations de la fonction f' sur $]0 ; +\infty[$, puis dresser le tableau des variations de la fonction f' sur $]0 ; +\infty[$.

On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction f' sur $]0 ; +\infty[$.

Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

5. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation $f(x) = x$

On considère dans cette partie la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = x - \ln(x).$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, on note g' sa dérivée.

1. Pour tout réel strictement positif, calculer $g'(x)$, puis dresser le tableau des variations de la fonction g .
Les limites de la fonction g aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
2. On admet que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 1$.
Résoudre, sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, l'équation $f(x) = x$.

Partie C : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n \ln(u_n).$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$

2. Justifier que la suite (u_n) converge.

On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.

3. Déterminer la valeur de ℓ .