

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par

$$f(x) = x^2 - x \ln(x).$$

On admet que  $f$  est deux fois dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ .

On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  et  $f''$  la fonction dérivée de la fonction  $f'$ .

## Partie A : Étude de la fonction $f$

- Déterminer les limites de la fonction  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .
- Pour tout réel  $x$  strictement positif, calculer  $f'(x)$ .
- Montrer que pour tout réel  $x$  strictement positif:

$$f''(x) = \frac{2x - 1}{x}.$$

- Étudier les variations de la fonction  $f'$  sur  $]0 ; +\infty[$ , puis dresser le tableau des variations de la fonction  $f'$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction  $f'$  sur  $]0 ; +\infty[$ .

Les limites de la fonction  $f'$  aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

- Montrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]0 ; +\infty[$ .

## Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation $f(x) = x$

On considère dans cette partie la fonction  $g$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par

$$g(x) = x - \ln(x).$$

On admet que la fonction  $g$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ , on note  $g'$  sa dérivée.

- Pour tout réel strictement positif, calculer  $g'(x)$ , puis dresser le tableau des variations de la fonction  $g$ .  
Les limites de la fonction  $g$  aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
- On admet que 1 est l'unique solution de l'équation  $g(x) = 1$ .  
Résoudre, sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ , l'équation  $f(x) = x$ .

## Partie C : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = \frac{1}{2}$  et pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n \ln(u_n).$$

- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ :

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$

- Justifier que la suite  $(u_n)$  converge.

On appelle  $\ell$  la limite de la suite  $(u_n)$  et on admet que  $\ell$  vérifie l'égalité  $f(\ell) = \ell$ .

- Déterminer la valeur de  $\ell$ .