On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle [0 ; 1] par

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que la fonction $f$ est dérivable sur l'intervalle [0 ; 1].

1. (a) Résoudre sur l'intervalle [0 ; 1] l'équation $f(x) = x$.

   (b) Démontrer que, pour tout $x$ appartenant à l'intervalle [0 ; 1],

   $$f'(x) = 2(1-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

   (c) Donner le tableau de variations de la fonction $f$ sur l'intervalle [0 ; 1].

   On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel $n$,

   $$u_{n+1} = f(u_n).$$

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n$ entier naturel,

   $$0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1.$$

   (b) En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.

3. Démontrer que la limite de la suite $(u_n)$ est $\ln(2)$.

4. (a) Justifier que pour tout entier naturel $n$, $\ln(2) - u_n$ est positif.

   (b) On souhaite écrire un script Python qui renvoie une valeur approchée de $\ln(2)$ par défaut à $10^{-4}$ près, ainsi que le nombre d'étapes pour y parvenir.

   Recopier et compléter le script ci-dessous afin qu'il réponde au problème posé.

```
def seuil() :
    n = 0
    u = 0.1
    while ln (2) − u . . . 0.0001 :
        n=n+1
        u= . . .
    return (u, n)
```

   (c) Donner la valeur de la variable $n$ renvoyée par la fonction seuil ().