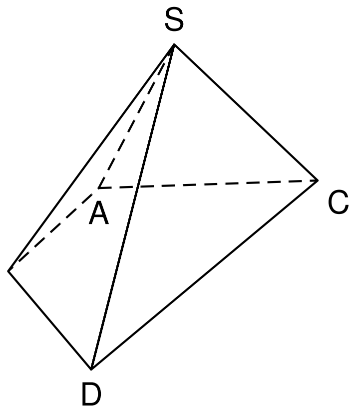
Exercice BAC 2024 Asie - Ex 2

Géométrie dans l'espace | Vecteurs | Équation cartésienne de plan | Représentation paramétrique | Calcul de volume | Produit scalaire | Orthogonalité

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ d'unité 1 cm, on considère les points : A$(3\,;\,-1\,;\,1)$; B$(4\,;\,-1\,;\,0)$; C$(0\,;\,3\,;\,2)$; D$(4\,;\,3\,;\,-2)$ et S$(2\,;\,1\,;\,4)$.
Dans cet exercice on souhaite montrer que SABDC est une pyramide à base ABDC trapézoïdale de sommet S, afin de calculer son volume.



1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. (a) Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

   (b) Montrer que le quadrilatère ABDC est un trapèze de bases [AB] et [CD].
   On rappelle qu'un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles appelés bases.
3. (a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}\,(2\,;\,1\,;\,2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point S et orthogonale au plan (ABC).

   (d) On note I le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
   Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{8}{3}\right)$, puis montrer que $\mathrm{SI} = 2\,\mathrm{cm}$.
4. (a) Vérifier que le projeté orthogonal H du point B sur la droite (CD) a pour coordonnées H$(3\,;\,3\,;\,-1)$ et montrer que HB $= 3\sqrt{2}$ cm.

   (b) Calculer la valeur exacte de l'aire du trapèze ABDC.
   On rappelle que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule

   $$\mathcal{A} = \frac{b+B}{2} \times h$$

   où b et B sont les longueurs des bases du trapèze et h sa hauteur.
5. Déterminer le volume de la pyramide SABDC.
   On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

   $$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$