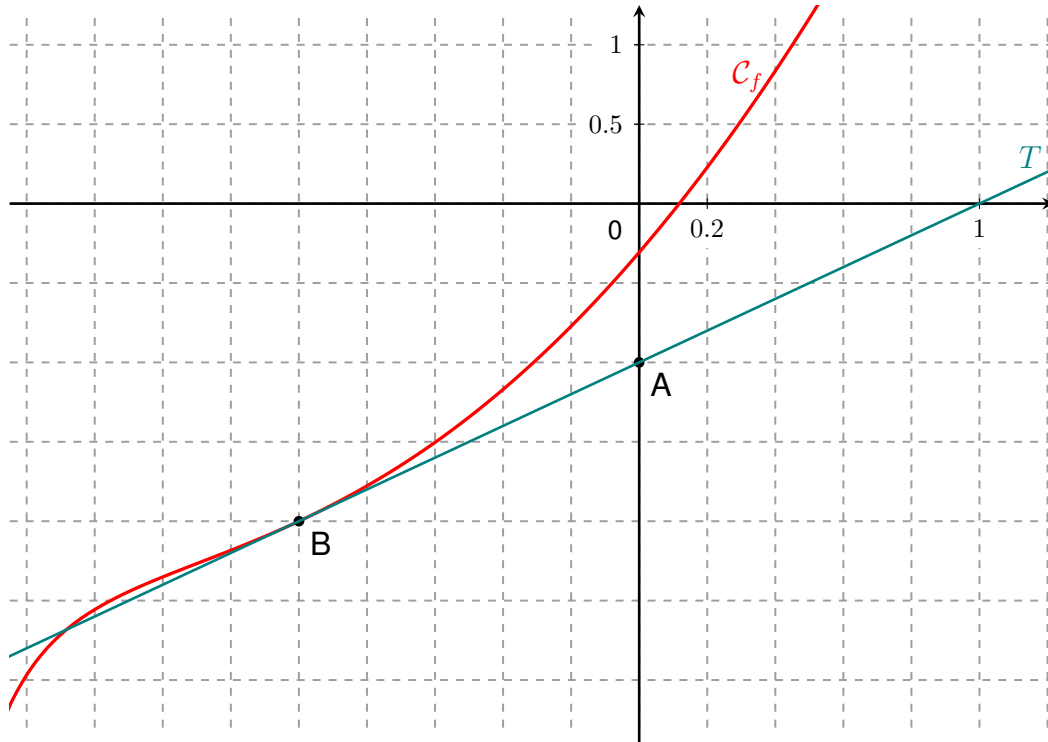


On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $] -2 ; +\infty[$. On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

On a tracé ci-dessous la courbe \mathcal{C}_f et sa tangente T au point B d'abscisse -1 .

On précise que la droite T passe par le point A(0 ; -1).



Partie A : exploitation du graphique.

À l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.
2. La fonction f est-elle convexe sur son ensemble de définition ? Justifier.
3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près d'une solution.

Partie B : étude de la fonction f

On considère que la fonction f est définie sur $] -2 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x + 2),$$

où \ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en -2 . Interpréter graphiquement ce résultat.

On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Montrer que pour tout $x > -2$, $f'(x) = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}$.

- Étudier les variations de la fonction f sur $] -2 ; +\infty[$ puis dresser son tableau de variations complet.
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $] -2 ; +\infty[$ et donner une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.
- En déduire le signe de $f(x)$ sur $] -2 ; +\infty[$.
- Montrer que \mathcal{C}_f admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

Partie C : une distance minimale.

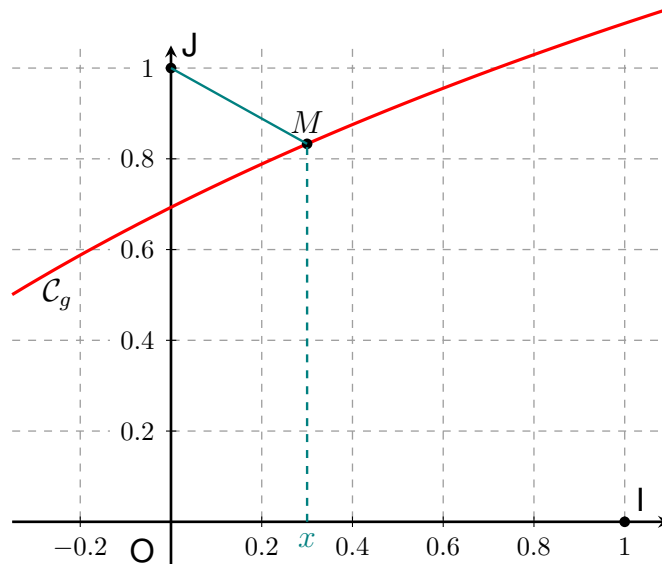
Soit g la fonction définie sur $] -2 ; +\infty[$ par $g(x) = \ln(x+2)$.

On note \mathcal{C}_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; I, J)$, représentée ci-après.

Soit M un point de \mathcal{C}_g d'abscisse x .

Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale.

On considère la fonction h définie sur $] -2 ; +\infty[$ par $h(x) = JM^2$.



- Justifier que pour tout $x > -2$, on a : $h(x) = x^2 + [\ln(x+2) - 1]^2$.
- On admet que la fonction h est dérivable sur $] -2 ; +\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.
On admet également que pour tout réel $x > -2$,

$$h'(x) = \frac{2f(x)}{x+2}$$

où f est la fonction étudiée en **partie B**.

- Dresser le tableau de variations de h sur $] -2 ; +\infty[$.
Les limites ne sont pas demandées.
 - En déduire que la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est α où α est le nombre réel défini à la question 4. de la **partie B**.
- On notera M_α le point de \mathcal{C}_g d'abscisse α .

- (a) Montrer que $\ln(\alpha + 2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.
- (b) En déduire que la tangente à \mathcal{C}_g au point M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires.
On pourra utiliser le fait que, dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1 .